

EXAMEN PARTIEL DE MATHÉMATIQUES – DUREE 2H

**Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.**  
**Veillez préciser le numéro de votre groupe sur votre copie**

**Exercice 1.** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les deux suites réelles définies par  $u_n = n$  et  $v_n = (-1)^n + 2$ . On considère les 3 assertions suivantes

- (a)  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ ,
- (b)  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq M$ ,
- (c)  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \leq M$ .

Les assertions (a), (b), (c) sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.

**Exercice 2.** Etudier la convergence et déterminer la limite éventuelle des suites de terme général :

- (a)  $u_n = n - \sqrt{n} + \sin(n!)$
- (b)  $u_n = \frac{2n^2 - n + 1}{3n - n^2}$
- (c)  $u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k (-1)^{n-k}$
- (d)  $u_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k$

**Exercice 3.**

1. Déterminer les racines carrées de  $\Delta = 8i$ .
2. En déduire les solutions de :  $z^2 + 2z + 1 - 2i = 0$ .

**Exercice 4.** Soit  $P$  la fonction polynomiale définie par :

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$$

1. Justifier que  $-1$  est racine de  $P$  dans  $\mathbb{C}$  et déterminer son ordre de multiplicité.
2. En déduire les racines de  $P$  dans  $\mathbb{C}$  qu'on donnera sous forme algébrique et exponentielle.

**Exercice 5.** Démontrer (par récurrence) que

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

**Exercice 6.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $x - 3 = \sqrt{x - 1}$ .

**Exercice 7.** On considère l'application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. L'application  $f$  est-elle injective? Justifier votre réponse.
2. L'application  $f$  est-elle surjective? Justifier votre réponse.