Université de Tours, L1 Mathématiques, Informatique et SM, S1 Mathématiques 2012/2013

EXAMEN PARTIEL DE MATHEMATIQUES – DUREE 3H

Documents, calculatrices et materiels électroniques interdits.
Veuillez préciser le numéro de votre groupe sur votre copie

Exercice 1.

1. Traduire en langage mathématique les propositions suivantes concernant la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   (P) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
   (Q) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée ;
   (R) $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. Ecrire en français puis en langage mathématique la négation non(Q) de (Q).
3. On suppose (P) et non(Q) vraie. Qu'en déduisez-vous pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 2. Etudier la convergence et déterminer la limite eventuelle des suites de terme général :

$$a)\ u_n = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big) \quad b)\ v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(\sqrt{2})^k \quad c)\ w_n = n^2 - \cos n\,.$$

Exercice 3. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x-2| - |x+2|$.

1. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation : $|f(x)| < 2$.

Exercice 4. Soit f l'application de $E = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $F = [-1, 1]$ définie par : $f(x) = \cos(x)$.

1. Déterminer
$$a)\ f(\{\frac{\pi}{3}\}) \quad b)\ f([-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]) \quad c)\ f^{-1}(\{-1\}) \quad d)\ f^{-1}(\{0\}).$$
2. En justifiant vos réponses, f est-elle injective, surjective ?

Tourner la page svp

Exercice 5. Soient $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 1-i$ et $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Donner la forme trigonométrique (ou exponentielle) de z_1 et z_2. Dans le plan complexe rapporté à $(0, \vec{u}, \vec{v})$, repère orthonormé direct, placer les points A et B d'affixes respectifs z_1 et z_2.
2. Donner la forme algébrique et trigonométrique (ou exponentielle) de z_3, en déduire la valeur de $\cos(\dfrac{5\pi}{12})$ et $\sin(\dfrac{5\pi}{12})$.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ des points M d'affixes z vérifiant : $|z-1+i| = z_1\bar{z}_1$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes :

$$(a)\ z^3 = i \qquad \text{et} \qquad (b)\ z^2 + \sqrt{3}z - i = 0\,.$$

Exercice 7. Attention, les parties A et B sont indépendantes.

Partie A. Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$.

1. Le nombre complexe i est-il racine de P ?
2. (a) Justifier que 2 est racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
   (b) En déduire la décomposition de P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

Partie B. Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels qui vérifient :

$$P(x) = (x-1)P'(x)\,.$$