Université de Tours Année 2016-2017
Licence L1 de Mathématiques, Informatique, Physique, Chimie, Sciences de la vie - S1

TD 2 : NOMBRES COMPLEXES ET EQUATIONS ALGÉBRIQUES

Exercice 1

1) a) Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes $-2i$, $4-4i$ et $-2+2\sqrt{3}i$.
   b) Représenter ces nombres dans le plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $i\dfrac{1-3i}{3+2i}$
3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les parties réelle et imaginaire de $z = \dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$, après avoir précisé pour quelles valeurs de θ ce nombre complexe z est bien défini.
4) Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. Déterminer graphiquement un argument et le module de $1+e^{i\theta}$.

Exercice 2
On considère les trois nombres complexes $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1) Donner les formes trigonométriques de z_1 et z_2.
2) Donner les formes algébriques et trigonométriques de z_3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 3
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z satisfaisant la condition

i) $|z-3| = |z-3i|$ *ii)* $|2-3i+z| = |2+2i|$ *ii)* $|1+i+z| = |2+2\sqrt{3}i|$ *iii)* $\dfrac{z-i}{z+i} \in \mathbb{R}$

Exercice 4
Montrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

Exercice 5

1) Utiliser la formule de Moivre pour exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$, et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin\theta$.
2) "Linéariser" $\cos^4\theta$ et $\cos^3\theta\ \sin^2\theta$.

Exercice 6

1) Donner la formule permettant de calculer la somme de nombres en progression géométrique, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$ où z est un nombre complexe et n est un nombre entier naturel.
2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer la somme $1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$.

Exercice 7
Résoudre les équations suivantes
$z^2 + 2z + 2 = 0\,, \quad z^2 = 2i\,, \quad z^2 + 6iz - 13 = 0\,, \quad z^2 = -15 + 8i\,, \quad z^2 - (5+3i)z + 7i + 4 = 0.$

Exercice 8 Déterminer les paires de nombres complexes dont la somme est égale à 2 et le produit est égal à 9. Y en a-t-il d'autres ?

Exercice 9
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

1) Déterminer U_{12} et représenter cet ensemble dans le plan complexe.
2) Justifier les inclusions $U_2 \subset U_4 \subset U_{12}$, $U_3 \subset U_6 \subset U_{12}$ et les identifier graphiquement.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{11} = \bar{z}$.

Exercice 10 Résoudre les équations $z^3 = -8$, $z^4 = 4i$ et $z^3 = -2 + 2i$.

Exercice 11

1) Effectuer la division euclidienne du polynôme $3x^5 + 2x^4 - x^2 + 1$ par le polynôme $x^3 + x + 2$. $2x^5 + x^3 - x^2 + 1$ par le polynôme $x^3 + x^2 - 1$.
2) Effectuer la division euclidienne du polynôme $x^4 - x^3 + x - 2$ par le polynôme $x^2 - 2x + 1$.

Exercice 12

1) Écrire le polynôme $B(x) = x^2 - 2x - 1$ comme produit de polynômes irréductibles.
2) Effectuer la division euclidienne du polynôme $A(x) = 2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x - 4$ par le poynôme B.
3) En déduire la valeur de $A(1+\sqrt{2})$.

Exercice 13
Pour chacun des polynômes suivants, déterminer les racines complexes et les racines réelles, factoriser en un produit de polynômes irréductibles complexes et factoriser en un produit de polynômes irréductibles réels.
$x^4 + 1\,, \quad (x^4 - 1)^2\,, \quad 2x^3 + 11x^2 - 20x + 7\,, \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ et
$x^2 - 2x\cos\alpha + 1$, où α est un nombre réel fixé.

Exercice 14
Soit n un nombre entier ≥ 2. Démontrer que le polynôme $nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$ est divisible par le polynôme $(x-1)^3$.

Exercice 15
En utilisant la version 4 du théorème fondamental de l'algèbre, démontrer que tout polynôme réel de degré impair possède au moins une racine réelle, et plus précisément un nombre impair de racines réeles.

Exercice 16
Soient $P(z)$ et $Q(z)$ deux polynômes de degré $\leq n$, qui coïncident pour $n+1$ valeurs distinctes de la variable z. Montrer que $P = Q$.

Exercice 17
Démontrer la formule de Taylor pour les polynômes.