

Attention ! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Les cinq exercices sont indépendants. Vous pouvez admettre le résultat d'une question pour faire les suivantes.

EXERCICE 1.

Soit $P(X) = X^4 + X^3 - 5X^2 + X - 6$.

1. Vérifier que i est racine de P . En déduire $P(-i)$.
2. Déterminer les racines complexes de P .

EXERCICE 2.

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on note A_m la matrice suivante

$$A_m = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ m & -1 & 2 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les matrices $A_0 + A_1$ et A_0A_1 .
2. Exprimer le déterminant de A_m en fonction de m . Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?
3. Écrire le système linéaire (S_m) d'écriture matricielle $A_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
4. Résoudre le système (S_0) .
5. Résoudre le système (S_{-1}) .

EXERCICE 3.

On définit la fonction f en posant $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. La fonction f est-elle paire ? impaire ?
3. Calculer la dérivée de f et en déduire que f' a même signe que la fonction g définie par

$$g(x) = x^4 - 12x^2.$$

4. Déterminer les variations de f sur \mathbb{R}_+ .
5. Étudier les limites de f à droite et à gauche en 2.
6. Déterminer, si elle existe, l'asymptote en $+\infty$ à la courbe associée à f .
7. Tracer le graphe de f .

EXERCICE 4.

On définit la fonction f en posant $f(x) = e^{\sin(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la dérivée de f .
2. Rappeler le théorème des accroissements finis.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - 1| \leq e|x|.$$

EXERCICE 5.

On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ en posant $u_0 = 0$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

1. Déterminer u_1 et u_2 .
2. Montrer que la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x + 1}$ est croissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante. On pourra procéder par récurrence.
4. Si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers un réel l , que vaut l ?
5. Conclure.