Université de Tours-L1 Mathématiques, Informatique et SM-S1 Mathématiques-2015/2016

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES-UE 103 DURÉE 2h

Attention ! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Les six exercices sont indépendants. Vous pouvez admettre le résultat d'une question pour faire les suivantes. Bon travail !

EXERCICE 1. Questions de cours.

1. Dans $\mathbb{C}$, combien existe-t-il de racines 5-ièmes de l'unité ? Les donner sous forme trigonométrique.
2. Soit (u_n) une suite réelle. À l'aide de quantificateurs, donner la définition de : "la suite (u_n) converge vers 0".
3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Donner la définition de : "la fonction f est dérivable en x_0".
4. Si une fonction f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$, est-elle nécessairement dérivable en x_0 ? Justifier.

EXERCICE 2.

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on note A_m la matrice suivante

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ m & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice $A_0^2 + 2A_0$.
2. Exprimer le déterminant de A_m en fonction de m. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?
3. Écrire le système linéaire (S_m) d'écriture matricielle $A_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
4. Résoudre le système (S_0).
5. Résoudre le système (S_1).

EXERCICE 3.

Déterminer les limites éventuelles des suites réelles de terme général

$$1)\ u_n = \frac{3n^2 + 5n - 1}{n^2 + 2}, \qquad 2)\ v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad 3)\ w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}.$$

EXERCICE 4.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 e^{1-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives.

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions f et g.
3. Justifier que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées respectives.
4. En déduire un tableau de variation pour chacune des fonctions f et g.
5. Déterminer les réels x tels que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x et la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point de même abscisse x soient parallèles.

EXERCICE 5.

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un nombre réel $c_n \in]n, n+1[$ tel que

$$(n+1)e^{\frac{1}{n+1}} - ne^{\frac{1}{n}} = \frac{c_n - 1}{c_n} e^{\frac{1}{c_n}}$$

3. En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = (n+1)e^{\frac{1}{n+1}} - ne^{\frac{1}{n}}$.

EXERCICE 6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 2x^3 + a}{x^3 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ b & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

où a et b sont des nombres réels.

1. Montrer que, indépendamment du choix de a et de b, la fonction f admet une droite asymptote en $+\infty$ dont on déterminera l'équation.
2. Pour quelles valeurs de a et b la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?