Université François-Rabelais de Tours L1
Année 2013-2014

Correction du partiel

Exercice 1.

(a) Cette assertion signifie que (u_n) est majorée. Elle est fausse car pour tout $M \in \mathbb{R}$ on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = n > M$. Il suffit de prendre $n = 0$ si $M < 0$ et par exemple, $n = E(M) + 1$ lorsque $M \geq 0$.
(b) Cette assertion signifie que (v_n) est majorée. Elle est vraie car pour $M = 3$ (par exemple), on a bien $v_n \leq 3$ en tout rang $n \in \mathbb{N}$.
(c) Cette assertion est toujours vraie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, il suffit de prendre $M = u_n$ pour vérifier la condition.

Exercice 2.

(a) En factorisant par n, on obtient $u_n = n(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\sin(n!)}{n})$. En remarquant que $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et que $\lim \frac{\sin(n!)}{n} = 0$ car $(\sin(n!))$ est une suite bornée, on obtient par opérations sur les limites, $\lim u_n = +\infty$.
(b) On a $u_n = \dfrac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n} - 1}$. Or $\frac{1}{n} \to 0$ et $\frac{1}{n^2} \to 0$, donc $u_n \to \frac{2}{-1} = -2$.
(c) Par la formule du binôme de Newton, on obtient $u_n = (\sqrt{2} - 1)^n \to 0$ car $|\sqrt{2} - 1| < 1$.
(d) On a $u_n = \frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} \to \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$ car $|\frac{2}{3}| < 1$ et donc $(\frac{2}{3})^{n+1} \to 0$.

Exercice 3.

1. On a $\Delta = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$. Les deux racines carrées de Δ sont donc $\delta = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $-\delta = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Ou bien, sous forme algébrique : $\delta = 2 + 2i$ et $-\delta = -2 - 2i$.
2. Le discriminant du trinôme $z^2 + 2z + 1 - 2i$ est $2^2 - 4(1 - 2i) = 8i$. C'est-à-dire $(2 + 2i)^2$ d'après la question 1. Les solutions de l'équation sont donc

$$z_1 = \frac{-2 - (2 + 2i)}{2} = -2 - i \qquad \text{et} \qquad z_1 = \frac{-2 + (2 + 2i)}{2} = i.$$

Exercice 4.
1. Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \quad \text{et} \quad P'(x) = 3x^2 + 4x + 2,$$

on a $P(-1) = 0$ et $P'(-1) = 1$. Le réel -1 est donc racine simple (ou de multiplicité 1) de P.

2. Le polynôme P est donc divisible par $x + 1$. Une division eulidienne (par exemple) donne

$$P(x) = (x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Les racines du polynôme $Q(x) = x^2 + x + 1$ sont complexes conjuguées puisque ses coefficients sont réels et son discriminant vaut -3. Elles sont données par

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \bar{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

Le polynôme P s'évrit donc

$$P(x) = (x+1)(x - e^{i\frac{2\pi}{3}})(x - e^{-i\frac{2\pi}{3}}).$$

Exercice 5.
Notons (P_n) la propriété à montrer.
Initialisation. La propriété est vraie au rang 1 car la somme, réduite à un terme, vaut -1
Hérédité. Supposons qu'elle est vraie à un rang $n \geq 1$. Si n est pair alors $n+1$ est impair et

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1) = \frac{n}{2} - (n+1) = -\frac{n+1}{2}.$$

De même, si n est impair alors $n+1$ est pair et

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1) = -\frac{n+1}{2} + (n+1) = \frac{n+1}{2}.$$

Par suite, (P_{n+1}) est vraie dans les deux cas.
Conclusion. La propriété (P_n) est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 6.
La racine carrée $\sqrt{x-1}$ est définie pour $x \geq 1$. De plus, elle est toujours positive donc l'équation ne peut être satisfaite que si $x \geq 3$. En élevant l'égalité au carré, on obtient

$$(x-3)^2 = x - 1 \quad \text{ou encore} \quad x^2 - 7x + 10 = 0.$$

L'équation ci-dessus a deux solutions : 2 et 5 dont seule la seconde est une solution de l'équation initiale.

Exercice 7.
1. Les entiers 1 et 2 ont même image par f : $f(1) = f(2) = 1$. L'application f n'est donc pas injective.
2. Pour tout entier naturel n, $f(2n) = n$: tout élément de l'ensemble d'arrivée ($\mathbb{N}$) a donc au moins un antécédent. L'application f est donc surjective.