TD : Dérivabilité

Exercice 1.
a. Démontrer en utilisant le taux d'accroissement que les fonctions suivantes sont dérivables au point x_0 et calculer leur dérivée en ce point :

$$f_1(x) = x^3 \text{ en } x_0 = 1 \text{ (on pourra utiliser la formule du binôme)}$$
$$f_2(x) = \sqrt{x} \text{ en } x_0 = 2 \text{ (on pourra utiliser l'expression conjuguée)}$$

b. Démontrer en utilisant le taux d'accroissement que les fonctions suivantes ne sont pas dérivables au point x_0 :

$$f_3(x) = |x-1| \text{ en } x_0 = 1$$
$$f_4(x) = \sqrt{|x|} \text{ en } x_0 = 0$$

Exercice 2. Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, sont-elles dérivables en 0 ?

$$f_1(x) = \frac{x}{1+|x|} \qquad f_2(x) = \frac{|x|}{1+x^2}$$

Exercice 3. Dans les cas suivants, déterminer les ensembles de définition de la fonction et de sa dérivée, puis calculer la fonction dérivée :

$$(a) \quad f(x) = (2x+3)(3x-7) \qquad (b) \quad g(x) = (2x^2+3x+1)^5$$

$$(c) \quad f(t) = \frac{2t+4}{3t-1} \qquad (d) \quad f_a(x) = a^x \quad (a>0)$$

$$(e) \quad x(s) = (1-s)\sqrt{1-s^2} \qquad (f) \quad \alpha(P) = \frac{\ln(P)}{P}$$

$$(g) \quad \theta(x) = \ln\left(\sqrt{1-2\sin^2(x)}\right) \qquad (h) \quad h(z) = \frac{\cos(z)+z\sin(z)}{\sin(z)-z\cos(z)}$$

Exercice 4. Pour chacune des applications f, g, h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

déterminer l'ensemble des points où elle est continue, puis l'ensemble des points où elle est dérivable, et enfin l'ensemble des points où sa dérivée est elle-même continue.

Exercice 5. Soit f la fonction polynomiale définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Etudier f.
   (b) Donner une équation de T_0, la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   En déduire une valeur approchée de $f(0,0023)$.
   (c) Quels sont les extremums, locaux et globaux, de f sur $\mathbb{R}$; sur $[0\,;1[$; sur $[0\,;2]$?

2. Discuter, selon les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $(E_m) : f(x) = m$.
   Déterminer la partie entière des solutions de (E_0).
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_1$ d'équation : $y = |f(x)|$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
   Par lecture graphique, en quels points $|f|$ n'est-elle pas dérivable ?

Exercice 6. En utilisant le Théorème des Accroissements Finis, démontrer les inégalités suivantes :

(a) $\forall x \in \,]0\,;+\infty[\,,\ \dfrac{1}{x+1} \leq \ln(1+x) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

(d) (Inégalité des accroissements finis) Plus généralement, soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$, telle que $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$. Démontrer que

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)\,.$$

En déduire également que si $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in \,]a\,;b[$, alors pour tout $x, y \in [a\,;b]$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\,.$$

Exercice 7. On souhaite étudier la suite récurrente définie par

$$u_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{4}\sin(\frac{1}{u_n}) + 1.$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{4}\sin(\dfrac{1}{x}) + 1$. On pose $I = \left[\dfrac{3}{4}\,;\dfrac{5}{4}\right]$.

1. Montrer que $u_1 \in I$.
2. Montrer que I est stable par f.
3. Montrer que f admet un unique point fixe sur I. On notera ce point fixe ℓ.
   [On pourra étudier la fonction $g(x) = f(x) - x$.]
4. Montrer que pour tout $x, y \in I$ on a
$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{9}|x - y|.$$
5. En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 8. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

1) Prouver que si f s'annule en n points de I, $n \geq 2$, alors, sa dérivée f' s'annule en au moins $n-1$ points de I.
2) Déduire de ce qui précède que toute fonction polynomiale P définie par
$$P(x) = x^{p+3} + ax + b\,,$$
où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $p \in \mathbb{N}$, admet au plus trois racines réelles.

Exercice 9.

1. Déterminer les droites asymptotes à $\mathcal{C}$ courbe représentative de $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$.
2. Déterminer les droites asymptotes à $\mathcal{C}$ courbe représentative de $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$.

Exercice 10. Montrer que la fonction sinus est concave sur $[0, \pi/2]$. En déduire que

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$$

pour tout $x \in [0, \pi/2]$.

Exercice 11.

1) Montrer que la fonction sinus est bijective de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1\,;1]$. On note arcsin sa fonction réciproque de $[-1\,;1]$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Déterminer l'ensemble des points où arcsin est dérivable et calculer sa dérivée.
2) Même question avec cosinus et tangente sur les intervalles $[0\,;\pi]$ et $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ respectivement.