TD 6 : Systèmes linéaires, matrices et déterminants

Exercice 1.

1. Résoudre et interpréter géométriquement :

$$(S_1)\begin{cases} x+2y-z &= 2 \\ 2x+y+3z &= -1 \\ 8x+7y+7z &= 1 \end{cases} \quad ; \qquad (S_2)\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x-2y+z &= -2 \end{cases} \quad ; \qquad (S_3)\begin{cases} 2x+5y-4z &= 2 \\ 15x-9y+z &= 15 \\ 21x-12y+z &= 21 \\ 8x-13y+6z &= 8 \end{cases}.$$

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y)=(x-y,2x+y)$.
   Prouver que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 2.

Soit m un nombre réel.

1. Déterminer, en fonction du paramètre m, l'intersection dans le plan des deux droites d'équations : $x+y=3$ et $2x+my=m+4$.
2. Déterminer, en fonction du paramètre m, l'intersection dans l'espace des deux plans d'équations : $2x-my+z=m$ et $x-y+2z=0$.
3. Résoudre, en fonction du paramètre m, les systèmes linéaires suivants :

$$(S_m)\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y+3z &= 2 \\ 2x+3y+4z &= m \end{cases} \quad ; \qquad (S'_m)\begin{cases} x+3y+3z+2t &= 1 \\ x+y-z+5t &= -1 \\ x+3y-z+4t &= 1 \\ x+y+3z+mt &= 3 \end{cases}.$$

Exercice 3.

Soient $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2+2AB+B^2$ et $(A+B)^2$. Que constatez-vous ? Pourquoi ?
   Développer $(A+B)^2$, factoriser A^3-I_2.
2. Calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
3. Déterminer $\mathcal{C}_B=\{M\in M_2(\mathbb{R})/BM=MB\}$.
4. Résoudre dans $M_2(\mathbb{R})$: $BM=\mathcal{O}_2$.

Exercice 4.

Soient $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A à l'aide de B et I_3.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer B^n puis, en déduire A^n.

Exercice 5.

Calculer les quatre déterminants suivants :

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad ; \quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad ; \quad D_4=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 6.

Calculer $D_4 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Généraliser.

Exercice 7.

1. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

$A_z = \begin{pmatrix} z^3 & -i \\ i & z \end{pmatrix}$ où $z \in \mathbb{C}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Sans nouveaux calculs de déterminant, déterminer : $\det(-3B), \det(B^2), \det({}^tB.B), \det(com(B))$.

3. Donner trois manières de résoudre le système linéaire (S) : $B.X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ où : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. Calculer $B.{}^tB$. En déduire que B est inversible, donner son inverse puis calculer $|\det B|$.

Exercice 9.

Soit $P = X^2 + X - 2$ un polynôme annulateur de $A \in M_p(\mathbb{K})$.

1. Exprimer A^2 puis A^3 en fonction de I_p et A. Prouver que A est inversible et donner son inverse en fonction de I_p et A.
2. Déterminer le reste de X^n, où $n \in \mathbb{N}$, dans la division euclidienne par P, puis en déduire A^n en fonction de I_p et A.

Exercice 10.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. Prouver que s'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que : $B.A = I_n$, alors A est inversible avec $A^{-1} = B$.
2. Prouver (par l'absurde) que s'il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $X \neq O_{n,1}$ telle que : $A.X = O_{n,1}$, alors A n'est pas inversible.

Exercice 11.

1. Calculer le déterminant suivant : $V_3(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{C}$.

   A quelles conditions est-il non nul ? Généraliser.

2. Lorsque a, b et c sont deux à deux distincts, montrer que pour tout complexe d, le système linéaire ci-dessous admet une unique solution à déterminer en fonction des paramètres complexes a, b, c et d :

$$(S) \begin{cases} x + y + z &= d \\ ax + by + cz &= d^2. \\ a^2x + b^2y + c^2z &= d^3 \end{cases}$$