TD : Fonctions réelles : Limites et Continuité

Exercice 1. Dans les cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, puis son éventuelle limite en α :

(a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$, $\alpha \in \{-\infty, 1, +\infty\}$ (b) $u(x) = \dfrac{|x| - 2}{x^2 - 4}$, $\alpha = -2$

(c) $f(y) = \dfrac{\cos y}{y}$, $\alpha = +\infty$ (d) $f(t) = \sqrt{t^2 - 1} - t$, $\alpha = +\infty$

(e) $x(s) = \dfrac{\sin(s)}{s}$, $\alpha = 0$ (f) $f(p) = \cos p$, $\alpha = +\infty$

(g) $v(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, $\alpha \in \{0, +\infty\}$ (h) $g(Q) = \ln(\sqrt{Q} + 1) - \ln Q$, $\alpha = +\infty$.

Exercice 2. Déterminer les paramètres réels a et b tels que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ci-dessous, soit continue en $x_0 = -1$:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{x^2 + b}{x^2 + 3x + 2} & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{-1, -2\}. \end{cases}$$

Exercice 3. La fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = 1 - x - 2x\ln(|x|)$ peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?

Exercice 4.

1) Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue.
Démontrer que l'équation (E) : $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$
[Indication : on pourra considérer la fonction $g(x) = f(x) - x$].
2) Démontrer que toute fonction polynomiale de degré impair admet au moins une racine réelle.
3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$. Montrer que le polynôme $P(x) = x^n + ax - a$ a au moins une racine dans $[0, 1]$.
4) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des points où les fonctions suivantes sont continues.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 6.
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que f est bornée et g est continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.