TD 4 : Suites réelles

Exercice 1
Soit (u_n) une suite réelle. Écrire en langage mathématique :
1) (u_n) n'est pas majorée ; 2) (u_n) n'est pas minorée ; 3) (u_n) n'est pas bornée ;
4) (u_n) n'est pas croissante ; 5) (u_n) n'est pas décroissante ; 6) (u_n) n'est pas monotone ;
7) (u_n) converge vers -2 ; 8) (u_n) ne converge pas vers -2 ; 9) (u_n) ne tend pas vers $-\infty$.

Exercice 2
En utilisant la définition,

1) montrer que toute suite stationnaire est convergente,
2) montrer que la suite de terme général $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ converge vers 2,
3) montrer que la suite de terme général $u_n = (n+1)^2$ tend vers $+\infty$.

Exercice 3
Étudier les suites réelles suivantes (convergence, limite éventuelle, monotonicité, caractère borné).

1) $u_n = n^2 - 852n$ 2) $u_n = \dfrac{2n+1}{3n+2}$ 3) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$

4) $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$ 5) $u_n = a^n$, $a \in \mathbb{R}$ 6) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k$, $a \in \mathbb{R}$

Exercice 4
Déterminer, si elle existe, la limite des suites de terme général :

1) $u_n = \dfrac{2n^3 - 3n}{5n^3 + 4n^2 - 2}$ 2) $u_n = \dfrac{\cos(n^2)}{n}$ 3) $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{3^n + (-1)^n}$

4) $u_n = \dfrac{2n^3 - 3n}{3n\sqrt{n} - (-1)^n}$ 5) $u_n = \dfrac{n^2 - e^{-n}}{15n^3 + 4n \sin n}$ 6) $u_n = \dfrac{n^2 + \sin n}{3n^2 \cos(n\frac{\pi}{5})}$

7) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1}$ 8) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ 9) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^3+k}$

Exercice 5
Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $k! \geq 2^{k-1}$.
2) En déduire que (u_n) est convergente.

Exercice 6
Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1) Calculer S_1, S_2 et S_3.
2) Prouver que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
3) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2} \leq S_n \leq \frac{n}{n+1}$.
4) Qu'en déduisez-vous pour $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 7
Soient $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, puis conclure.

Exercice 8
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

1) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{2n}$ est décroissante et que la suite (w_n) définie par $w_n = u_{2n+1}$ est croissante.
2) Montrer que $\lim_{n\to\infty} v_n - w_n = 0$.
3) En déduire que la suite (u_n) converge et que sa limite ℓ vérifie $\ell \in [2/3, 1]$.

Exercice 9
Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

Exercice 10
On considère (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$. Montrer par l'absurde que la suite (u_n) diverge.