TD 3 : Logique, Ensembles et Applications

Exercice 1
Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :
a) $a \in E$ b) $a \subset E$ c) $\{a\} \subset E$ d) $\emptyset \in E$ e) $\emptyset \subset E$ f) $\{\emptyset\} \subset E$?

Exercice 2
Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7[$ et $C =]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, A^c, $A \setminus B$, $A^c \cap B^c$, $(A \cup B)^c$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$.

Exercice 3

1) Vrai ou faux ? Pour tout sous-ensemble A, B et C de E on a :
   i) $[(A \cap B) \cup C] \cap B = B \cap (A \cup C)$,
   ii) $C \cap [(A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B)] = A^c \cap B \cap C$,
   iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
2) Si $A \cap B = A \cup B$ que peut-on dire des ensembles A et B ?

Exercice 4
Représenter les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$. Peuvent-ils s'écrire comme le produit cartésien de deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$?
i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ est un entier } \}$; *ii)* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 4 \text{ et } 0 < y \leq 1\}$; *iii)* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 5
Compléter par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 4 \quad \ldots \quad x = 2$.
2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Z} \quad \ldots \quad x^2 \in \mathbb{Z}$.
3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = \pi \quad \ldots \quad e^{2ix} = 1$.
4) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $e^x < e^y \quad \ldots \quad x < y$.

Exercice 6

1. Montrer par l'absurde que 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer par contraposition : n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.
3. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 7
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.
Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes, puis donner leurs négations :
a) f s'annule
b) f est l'application nulle
c) f ne prend jamais deux fois la même valeur
d) f possède un maximum
e) f prend des valeurs arbitrairement grandes
f) f est une application croissante.

Exercice 8
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.
Donner la signification des assertions suivantes ainsi que leurs négations :

a) $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = c$
b) $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
d) $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
e) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Exercice 9
Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1) $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ définie par $f(n) = 2n - 1$,
2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2x - 1$,
3) l'application **partie entière** $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$.

Exercice 10
L'application $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ est-elle injective, surjective ? Quelle restriction doit-on faire sur l'ensemble d'arrivée pour que f devienne une bijection ? Dans ce cas, expliciter l'application réciproque.

Exercice 11

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer les ensembles suivants :

$$i)\ f(]-2,1]) \quad ii)\ f(\{-2,\ 1\}) \quad iii)\ f([-2,1] \cap [1,2]) \quad iv)\ f([-2,1]) \cap f([1,2])$$

$$v)\ f^{-1}(\{4\}) \quad vi)\ f^{-1}([0,1]) \quad vii)\ f^{-1}([-1,1]) \quad viii) f^{-1}(\{-1\}).$$

2) Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application partie entière. Déterminer les ensembles suivants :

$$i)\ E(]-2,1]) \quad ii)\ E(\{-1,\ \sqrt{2}\}) \quad iii)\ E^{-1}([-1,\sqrt{2}]) \quad iv)\ E^{-1}(\{-2,\ 1\}) \quad v)\ E^{-1}(\{\sqrt{2}\}).$$