EXAMEN DE MATHÉMATIQUES–UE 103–SESSION 1–DURÉE 3h

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits

EXERCICE 1.

On considère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$ et le système (S_m) : $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ mx+y+z &= 1 \\ mx+my+z &= m \end{cases}$

où m est un réel.

1. Pour quelles valeurs du réel m, la matrice A_m est-elle inversible ?
2. Déterminer A_0^{-1}.
3. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_1^n = 3^{n-1}A_1$.
4. Écrire (S_m) sous forme matricielle. Pour quelles valeurs de m, le système (S_m) admet-il une unique solution ?
5. Résoudre (S_0), (S_1) et (S_{-1}).

EXERCICE 2.

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1\,,$$

dont on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier la dérivabilité à droite de f en 0. Qu'en déduisez-vous pour $\mathcal{C}$?
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.
   En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et résumer ce qui précède dans un tableau de variation.
4. Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?
5. Donner une équation de T_4 la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4.
6. (a) Prouver que f réalise une bijection du segment $I = [0,1]$ sur un intervalle à préciser.
   (b) Établir que : $\forall x \in I$, $f \circ f(x) = x$.
7. Tracer T_4 et $\mathcal{C}$.

Tourner la page svp

EXERCICE 3.

1. Effectuer la division euclidienne de $P(X) = 2X^3 - X^2 + 2X + 3$ par $Q(X) = X^2 + 1$.

2. En déduire que la courbe C de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ admet une asymptote Δ en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on donnera une équation.

3. Étudier la position relative de C et Δ.

EXERCICE 4.

À l'aide du théorème des accroissements finis, dont on justifiera l'emploi sur le segment $I = [0,5\,;\,0,6]$, établir l'encadrement suivant :

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \arcsin(0,6) < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}.$$

EXERCICE 5.

Soit $P(X) = X^4 + (4-i)X^3 + (5-4i)X^2 + 4(1-i)X + 4$.

1. Démontrer que -2 est racine double du polynôme P.

2. Déterminer toutes les racines de P.