Un corrigé de l'examen Session 1

Exercice 1

Pour tout réel m, on considère les matrices $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$ et les systèmes (S_m) : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \\ mx + my + z = m \end{cases}$.

1. A_m est inversible $\Leftrightarrow$ $\det(A_m) \neq 0$

Pour le calcul de $\det(A_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ m & m & 1 \end{vmatrix}$, en effectuant : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ puis en développant suivant C_3, on obtient :

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 0 \\ m-1 & m-1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \times (m-1)^2 = (m-1)^2.$$

$\underline{A_m \text{ est inversible} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}}$

2. D'après 1., $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible $(0 \neq 1)$.

On pose : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Alors, $A_0 . X = Y \Leftrightarrow X = A_0^{-1} . Y$

$$A_0 . X = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Par remontée (le système est échelonné), on obtient : $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$, soit : $\underline{A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

3. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition suivante :

$$P_n : \quad A_1^n = 3^{n-1} . A_1 .$$

Prouvons, par récurrence sur n, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

i) initialisation $(n = 1)$

$A_1^1 = A_1$ et $3^{1-1} . A_1 = 1 . A_1 = A_1$, donc P_1 est vraie.

ii) hérédité

Supposons que P_n est vraie (hypothèse de récurrence) pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et prouvons qu'alors P_{n+1} est vraie.

$A_1^{n+1} = A_1^n . A_1$ or d'après l'hypothèse de récurrence : $A_1^n = 3^{n-1} A_1$, par conséquent

$A_1^{n+1} = 3^{n-1} A_1 . A_1 = 3^{n-1} A_1^2$ avec $A_1^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 A_1$, soit

$A_1^{n+1} = 3^{n-1} . 3 \; A_1 = 3^n A_1$: P_{n+1} est vraie.

On a prouvé : P_1 est vraie (i) et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ (ii) donc établi, par récurrence sur n, la vérité de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; A_1^n = 3^{n-1} . A_1}$

4. $\underline{\text{L'écriture matricielle de } (S_m) \text{ est : } A_m . X = B_m \text{ où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}}.$

Le système (S_m) admet une unique solution (c-à-d : (S_m) est un système de Cramer) si, et seulement si ; $\det(A_m) \neq 0$, soit d'après 1. :

$\underline{(S_m) \text{ admet une unique solution} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}}$

5. • (S_0) : $A_0 . X = B_0$

Puisque A_0 est inversible et que l'on a déterminé A_0^{-1} (2.), on peut utiliser l'équivalence :

$A_0 . X = B_0 \Leftrightarrow X = A_0^{-1} . B_0$

Or, $A_0^{-1} . B_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit : $\underline{\mathcal{S}_0 = \{(0,1,0)\}}$.

•• (S_1) : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 1 \Leftrightarrow x = 1 - y - z$, soit : $\underline{\mathcal{S}_1 = \{(1-y-z, y, z) / (y,z) \in \mathbb{R}^2\}}$.

••• (S_{-1}) : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \\ -x - y + z = -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 2z = 2 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$ et par remontée, on obtient successivement :

$z = 0$, $y = 1$ et $x = 0$, soit $\underline{\mathcal{S}_{-1} = \{(0,1,0)\}}$.

Exercice 2

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$, dont on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = x\left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x}\right) = x\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, les théorèmes usuels de limite assurent que :

$\underline{\lim_{+\infty} f = +\infty}$.

2. Pour tout $h > 0$: $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h - 2\sqrt{h} + 1 - 1}{h} = 1 - \frac{2}{\sqrt{h}}$.

Or $\lim_{h\to 0^+} \sqrt{h} = 0^+$, les théorèmes usuels de limite assurent que : $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -\infty$.

Par conséquent, <u>f n'est pas dérivable à droite en 0</u> ; cependant, <u>$\mathcal{C}$ admet au point $A(0,1)$ une demi-tangente verticale</u>.

3. Les fonctions : $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto -2\sqrt{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, il en est donc de même pour leur somme : f.

<u>f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$</u>, et,

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 0 = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}}.$$

sur $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{x} - 1$:

$$\sqrt{x} - 1 \geqslant 0 \iff \sqrt{x} \geqslant 1 \iff x \geqslant 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Grâce à ce qui précède, sur $\mathbb{R}_+$:

<u>$1 = f(0)$ est un maximum local de f</u> ;

<u>$0 = f(1)$ est le minimum global de f</u>.

5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (3.), donc en 4 ; par conséquent, $\mathcal{C}$ admet une tangente T_4 au point d'abscisse 4.

$$\left.\begin{aligned} f(4) &= 4 - 2\sqrt{4} + 1 = 1 \\ f'(4) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \underline{T_4 : y = \frac{1}{2}(x-4) + 1 = \frac{1}{2}x - 1}.$$

6. (a) Sur l'intervalle $I = [0,1]$, f est continue (comme somme des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto -2\sqrt{x}$), strictement décroissante (3.) donc d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$ avec :

$f(I) = f([0,1]) = [f(1), f(0)] = [0,1] = I$.

<u>f réalise une bijection de I sur I</u>.

(b) Pour tout $x \in I$,

$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) - 2\sqrt{f(x)} + 1 = x - 2\sqrt{x} + 1 - 2\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} + 1$ $(*)$.

Or, $x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2$ donc $\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} = |\sqrt{x} - 1| = 1 - \sqrt{x}$ car pour tout $x \in I$ (c-à-d : $0 \leq x \leq 1$), on a $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$, donc $\sqrt{x} - 1 \leqslant 0$.

En reportant dans $(*)$, on obtient :

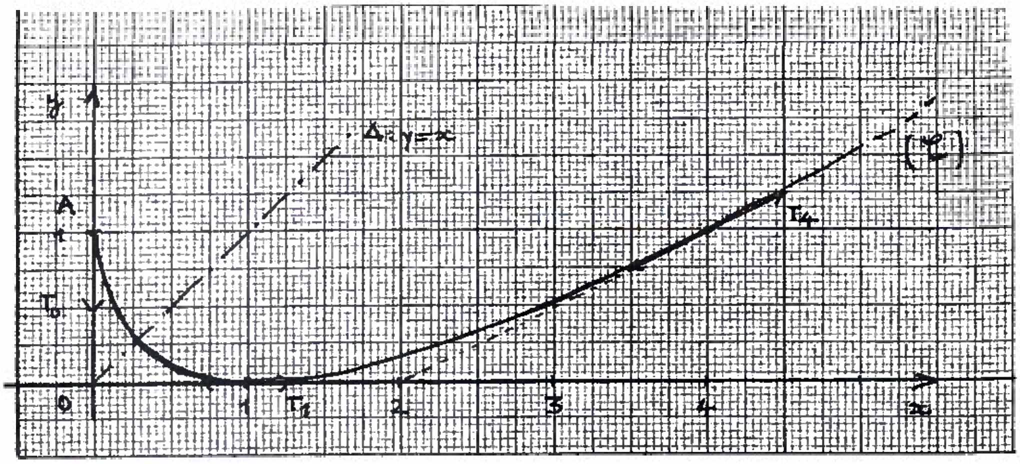
$(f\circ f)(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 - 2(1 - \sqrt{x}) + 1 = x$.

$$\underline{\forall x \in I,\ (f\circ f)(x) = x}$$

<u>Remarque</u>

Géométriquement, ceci signifie que la restriction de $\mathcal{C}$ à I est symétrique (dans un repère orthonormé) par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

7.



Exercice 3

1. Effectuons la division euclidienne de $P(X) = 2X^3 - X^2 + 2X + 3$ par $Q(X) = X^2 + 1$:

$$\begin{array}{rrr|l} 2X^3 - X^2 + 2X + 3 & & & X^2 + 1 \\ \hline -2X^3 \quad\quad -2X & & & 2X - 1 \\ \hline -X^2 \quad\quad +3 & & & \\ X^2 \quad\quad +1 & & & \\ \hline 4 & & & \end{array}$$

$\underline{P(X) = Q(X)\,(2X-1) + 4}$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Grâce à 1. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(x^2+1)(2x-1)+4}{x^2+1} = 2x - 1 + \frac{4}{x^2+1}.$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x^2+1} = 0$ puisque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 + 1 = +\infty$.

Par conséquent, <u>la droite $\Delta : y = 2x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$, courbe représentative de f, en $+\infty$ et en $-\infty$.</u>

3. La position relative de $\mathcal{C}$ et Δ est déterminée par le signe sur $\mathbb{R}$ de :

$$f(x) - (2x-1) = \frac{4}{x^2+1}.$$

or, pour tout x réel, $\dfrac{4}{x^2+1} > 0$:

<u>Sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ est au-dessous de Δ.</u>

Exercice 4

La fonction arcsin est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$.
Sur le segment $I = [0,5 ; 0,6]$ inclus dans $]-1 ; 1[$, elle vérifie donc les hypothèses du théorème des accroissements finis ; par conséquent :

$$\exists c \in\ ]0,5 ; 0,6[\ : \quad \arcsin(0,6) - \arcsin(0,5) = (0,6 - 0,5) \times (\arcsin)'(c) = \frac{0,1}{\sqrt{1-c^2}} \quad (*).$$

Puisque $0,5 < c < 0,6$, alors :

$0,25 < c^2 < 0,36$ (car $X \mapsto X^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$) ;

$1 - 0,36 < 1 - c^2 < 1 - 0,25$, soit $0,64 < 1 - c^2 < 0,75$;

$\sqrt{0,64} < \sqrt{1-c^2} < \sqrt{0,75}$ (car $X \mapsto \sqrt{X}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$) ;

$\dfrac{1}{\sqrt{0,75}} < \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \dfrac{1}{\sqrt{0,64}}$ (car $X \mapsto \dfrac{1}{X}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$).

En reportant dans l'égalité $(*)$, on obtient l'encadrement suivant :

$$\frac{0,1}{\sqrt{0,75}} < \arcsin(0,6) - \arcsin(0,5) < \frac{0,1}{\sqrt{0,64}}.$$

Or, $\arcsin(0,5) = \dfrac{\pi}{6}$ (l'unique réel de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut $0,5$), et,

$\dfrac{0,1}{\sqrt{0,75}} = \dfrac{1}{\sqrt{75}} = \dfrac{1}{5\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{15}$; $\dfrac{0,1}{\sqrt{0,64}} = \dfrac{1}{\sqrt{64}} = \dfrac{1}{8}$, d'où le résultat :

$$\underline{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \arcsin(0,6) < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}}$$

Exercice 5

Soit $P(X) = X^4 + (4-i)X^3 + (5-4i)X^2 + 4(1-i)X + 4$.

1. . $P(-2) = (-2)^4 + (4-i)(-2)^3 + (5-4i)(-2)^2 + 4(1-i)\;(-2) + 4$

$P(-2) = 16 - 8(4-i) + 4(5-4i) - 8(1-i) + 4 = (16-32+20-8+4) + i(8-16+8)$

$P(-2) = 0$

.. $P'(X) = 4X^3 + 3(4-i)X^2 + 2(5-4i)X + 4(1-i)$

$P'(-2) = -8\times 4 + 12(4-i) - 4(5-4i) + 4(1-i) = (-32+48-20+4) + i(-12+16-4)$

$P'(-2) = 0$

... $P''(X) = 12X^2 + 6(4-i)X + 2(5-4i)$

$P''(-2) = 4\times 12 - 12(4-i) + 2(5-4i)$

$P''(-2) = 10 + 4i$

$P(-2) = P'(-2) = 0$ et $P''(-2) \neq 0$: -2 est racine double de P.

2. Puisque -2 est racine double de P, $(X-(-2))^2 = (X+2)^2$ divise P.

$$
\begin{array}{l|l}
X^4 + (4-i)X^3 + (5-4i)X^2 + 4(1-i)X + 4 & X^2 + 4X + 4 \\
\cline{2-2}
-X^4 - 4X^3 - 4X^2 & X^2 - iX + 1 \\
\cline{1-1}
\qquad -iX^3 + (1-4i)X^2 + 4(1-i)X + 4 & \\
\qquad iX^3 + 4iX^2 + 4iX & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad X^2 + 4X + 4 & \\
\qquad\qquad -X^2 - 4X - 4 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$P(X) = (X+2)^2(X^2 - iX + 1)$

z racine de P $\Leftrightarrow$ $P(z) = 0$ $\Leftrightarrow$ $z = -2$ ou $z^2 - iz + 1 = 0$

$\Delta = (-i)^2 - 4 = -5 = (\sqrt{5}\,i)^2$

$z_1 = \dfrac{i + \sqrt{5}\,i}{2}$ ou $z_2 = \dfrac{i - \sqrt{5}\,i}{2}$

Les racines de P sont : -2 (racine double) ; $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)i$ et $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)i$ (racines simples).