EXAMEN DE MATHÉMATIQUES–UE 103–SESSION 1–DURÉE 3h

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits

EXERCICE 1. On considère la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}, \quad \text{où } m \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer : A_0^2, ${}^tA_0$, $\det(A_0)$ et $\det(2\,A_0)$.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?
3. Déterminer A_0^{-1}.
4. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire :

$$(S_m) \begin{cases} x + y - z &= 1 \\ x + my - z &= 1 \\ x + y + mz &= m \end{cases}$$

   Écrire (S_m) sous forme matricielle. Pour quelles valeurs de m, (S_m) admet-il une unique solution ?

5. Résoudre (S_m) pour $m \in \{-1, 0, 1\}$.

EXERCICE 2.

1. On considère la suite$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
   (a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{n}$.
   (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$$

   (on rappelle que $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$).

   (a) Démontrer que pour tout nombre entier $k > 0$, on a :

$$\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}.$$

   (b) En déduire une expression de v_n en fonction de n puis la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Tourner la page svp

EXERCICE 3. *(les deux parties sont indépendantes)*

Partie A.

Soit f la fonction de la variable réelle définie par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Justifier précisement que f est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer f'.
3. Etudier la dérivabilité de f en -1 à droite et en 1 à gauche ; qu'en déduisez-vous pour son graphe $\mathcal{C}$?
4. Etudier les variations de f sur $[-1,1]$.
5. Tracer $\mathcal{C}$.

Partie B.

1. Enoncer le théorème des accroissements finis.
2. En justifiant son utilisation sur $I = [1,2]$ pour Arctan, établir que :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{5} < \mathrm{Arctan}(2) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 4.

1. Trouver les racines carrées du complexe

$$\Delta = -8 - 6i\,.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(2+i)z^2 - 3(1+i)z + 2(1+i) = 0\,.$$