Exercice 1 Pour tout $m \in \mathbb{R}$, $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1- $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{A_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$, $\underline{{}^tA_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$.

$\det(A_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, en effectuant : $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$, on obtient : $\det(A_0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,

soit en développant suivant C_1 : $\det(A_0) = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) = -1$.

$\det(A_0) = -1$, donc $\det(2A_0) = 2^3 \det(A_0) = 8 \times (-1) = -8$.

$\underline{\det(A_0) = -1 \text{ et } \det(2A_0) = -8}$.

2- A_m est inversible $\Leftrightarrow \det(A_m) \neq 0$

$\det(A_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$, en effectuant : $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$, puis en développant suivant C_1 :

$\det(A_m) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & m & -1 \\ 1+m & 1 & m \end{vmatrix} = (1+m) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m & -1 \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)$.

$\underline{A_m \text{ est inversible} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}}$

3- A_0 est inversible puisque $\det(A_0) = -1 \neq 0$ d'après 1-.

On pose : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, alors on a l'équivalence :

$$A_0 . X = Y \Leftrightarrow X = A_0^{-1} . Y$$

$$A_0 . X = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ x_1 \quad\quad - x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 \quad\quad = y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ \quad - x_2 \quad\quad = -y_1 + y_2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \quad\quad\quad x_3 = -y_1 + \quad y_3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

Soit "par remontée" : $\begin{cases} x_1 = -y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = -y_1 \quad\quad + y_3 \end{cases}$ et par conséquent : $\underline{A_0^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

Remarque : Ce résultat se vérifie par l'égalité : $A_0 . A_0^{-1} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4- On considère, pour tout $m \in \mathbb{R}$, le système linéaire :

$$(S_m) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + my - z = 1 \\ x + y + mz = m \end{cases}$$

L'écriture matricielle de (S_m) est : $\underline{A_m . X = B_m \text{ où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B_m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}}$.

(S_m) admet une unique solution (c-à-d : (S_m) est un système de Cramer) si, et seulement si, A_m est inversible donc d'après 2- :

$\underline{(S_m) \text{ admet une unique solution} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}}$

5 -

. $(S_{-1})\begin{cases} x+y-z=1\\ x-y-z=1\\ x+y-z=-1\end{cases}$ L_1 et L_3 sont incompatibles, donc $\underline{\mathcal{S}_{-1}=\emptyset}$.

.. $(S_1)\begin{cases} x+y-z=1\\ x+y-z=1\\ x+y+z=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1\\ x+y+z=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1\\ z=0\end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1\\ z=0\end{cases}$, donc $\underline{\mathcal{S}_1=\{(1-y,y,0)\ /\ y\in\mathbb{R}\}}$.

... $(S_0) \Leftrightarrow A_0.X=B_0 \Leftrightarrow X=A_0^{-1}.B_0$

donc (S_0) admet une unique solution : $X=A_0^{-1}.B_0=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$, soit :

$\underline{\mathcal{S}_0=\{(0,0,-1)\}}$

Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

1 - Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

$\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}=\dfrac{k+1-1}{(k+1)!}=\dfrac{k}{(k+1)!}$.

$\underline{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}=\dfrac{k}{(k+1)!}}$

2 - Grâce à ce qui précède :

$u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!}$, donc par télescopage

$u_n=\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}-\left(\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n+1)!}\right)=\dfrac{1}{1!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$.

$\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=1-\dfrac{1}{(n+1)!}}$.

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n+1)!=+\infty$, on en déduit que : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Exercice 3

Partie A.

Soit $f:\ \mathbb{R}\ \to\ \mathbb{R}$

$x \mapsto (1-x)\sqrt{1-x^2}$

1. La fonction f est définie sur $D=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 1-x^2\geqslant 0\}=[-1,1]$.

$\underline{D=[-1;1]}$.

2 - $x\mapsto 1-x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) ;

$X\mapsto\sqrt{X}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Par conséquent, le théorème de dérivation d'une composée assure que :

$x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ est dérivable pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $1-x^2\in\mathbb{R}_+^*$.

Or, $1-x^2\in\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow x\in\,]-1,1[$.

$x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1,1[$; $x\mapsto 1-x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-1,1[$,

par conséquent, f est dérivable sur $]-1,1[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$\underline{f \text{ est dérivable sur }]-1,1[}$.

$\forall x \in]-1,1[\quad f'(x) = -\sqrt{1-x^2} + (1-x) \times \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3 - . Dérivabilité de f en -1 à droite.

On pose : $A(h) = \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ pour $h > 0$ (précisément, pour $h \in]0,2]$) ;

$$A(h) = \frac{(1-(-1+h))\sqrt{1-(-1+h)^2} - 0}{h} = \frac{(2-h)\sqrt{-h^2+2h}}{h} = \frac{(2-h)\sqrt{h}\sqrt{2-h}}{h} \quad \text{car } h>0$$

$$A(h) = \frac{(2-h)\sqrt{2-h}}{\sqrt{h}}$$

$\lim\limits_{h \to 0^+} (2-h)\sqrt{2-h} = 2\sqrt{2}$ $\quad \lim\limits_{h\to 0^+} \sqrt{h} = 0$ et $\sqrt{h} > 0$ pour $h > 0$ donc $\lim\limits_{h \to 0^+} A(h) = +\infty$.

$\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = +\infty$: <u>f n'est pas dérivable en -1 à droite</u> ; cependant,

<u>C admet en $A(-1,0)$ une demi-tangente verticale.</u>

.. Dérivabilité de f en 1 à gauche.

On pose : $A(h) = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ pour $h < 0$ (précisément, pour $h \in [-2,0[$) ;

$$A(h) = \frac{(1-(1+h))\sqrt{1-(1+h)^2} - 0}{h} = \frac{-h\sqrt{-h^2-2h}}{h} = -\sqrt{-h^2-2h} \quad \text{car } h \neq 0$$

$\lim\limits_{h \to 0^-} \sqrt{-h^2-2h} = 0$ donc $\lim\limits_{h\to 0^-} A(h) = 0$.

$\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0$: <u>f est dérivable en 1 à gauche et $f'_g(1) = 0$</u> ;

<u>C admet en $B(1,0)$ une demi-tangente horizontale.</u>

4 - D'après 2., sur $]-1,1[$, $f'(x)$ est du signe de $2x^2 - x - 1$.

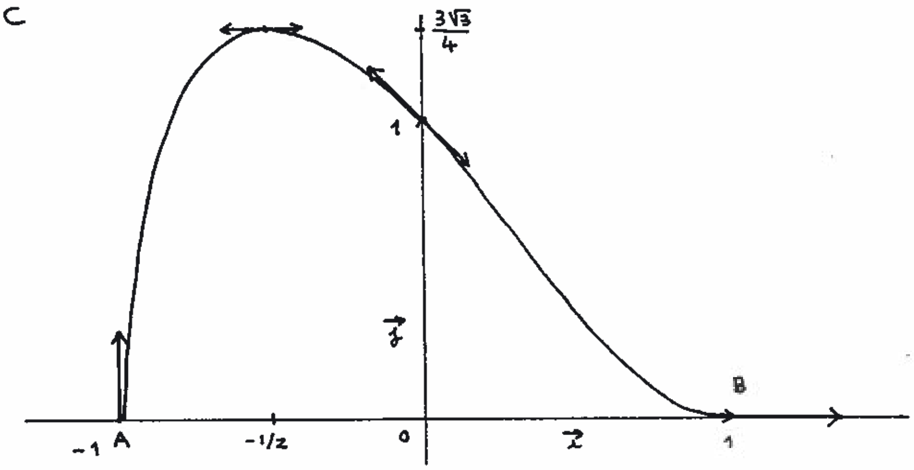
Or, $2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$, donc :

x	-1		$-1/2$		1
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ est le maximum de f sur $[-1,1]$.

$0 = f($ $f(1)$ est le minimum de f sur $[-1,1]$.

5 - Tracé de C



$f(0) = 1$

$f'(0) = -1$

Exercice 4

1- Soit $\Delta = -8-6i$.

$$|\Delta| = \sqrt{(-8)^2+(-6)^2} = \sqrt{64+36} = 10.$$

On cherche les complexes $\delta = x+iy$, où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tels que : $\delta^2 = \Delta$.

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = -8 \\ x^2+y^2 = 10 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 3 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Les racines carrées de Δ sont : $1-3i$ et $-1+3i$.

2- (E) : $(2+i)z^2 - 3(1+i)z + 2(1+i) = 0$

$\Delta = 9(1+i)^2 - 8(1+i)(2+i) = 18i - 8 - 24i$, soit

$\Delta = -8-6i$

Grâce à ce qui précède, (E) admet deux solutions :

$$z_1 = \frac{3(1+i)+1-3i}{2(2+i)} = \frac{2}{2+i} = \frac{2}{5}(2-i) = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$$

et

$$z_2 = \frac{3(1+i)-1+3i}{2(2+i)} = \frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{5} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \left\{1+i \ ; \ \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i\right\}$$