EXAMEN DE MATHEMATIQUES–UE 103–SESSION 2–DUREE 3h

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits

EXERCICE 1. Pour tout réel m on pose

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det A_m$.
2. Pour quelles valeurs de m, la matrice A_m est-elle inversible?
3. Calculer A_m^{-1}, lorsqu'elle est inversible.
4. Soient $(m, \alpha) \in \mathbb{R}^2$.
   Résoudre, selon les valeurs de m et de α, le système (S) suivant :

$$\begin{cases} x + mz = 1 \\ x + y + z = 0 \\ -y = \alpha \end{cases}$$

   on pourra pour cela considérer les deux cas : $m \neq 1$ et $m = 1$.

EXERCICE 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{pour } x > 0 \\ 0 \quad \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ? et si oui calculer $f'(0)$.
2. Pourquoi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$? Calculer sa dérivée.
3. Donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
4. Vérifier que : $\lim_{y \to 0} \dfrac{e^y - 1}{y} = 1$.
5. En déduire que : $\lim_{x \to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$.
6. Montrer que le graphe (C) de f admet au voisinage de $+\infty$ une droite asymptote D dont on déterminera l'équation (on pourra pour cela utiliser les calculs en 2) et 3)).
7. Tracer le graphe (C) de f.
8. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle à préciser.

Tournez svp

EXERCICE 3. Pour $x \geq 0$, on pose:

$$g(x) = 3\sqrt{x+2} - 4$$

1. Prouver que la fonction g est croissante et que, pour tout $x \geq 0$, on a $g(x) \geq 0$.
2. Résoudre l'équation $g(x) = x$.
3. On définit la suite (u_n) par récurrence de la manière suivante : $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$.

   i. Montrer que la suite (u_n) est monotone et étudier son sens de variation en fonction des valeurs de u_0 (on pourra distinguer les deux cas: $0 \leq u_0 \leq 2$ et $u_0 > 2$.

   ii. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

   iii. Déduire de ce qui précéde que la suite (u_n) converge vers 2.

   iv. Prouver que la fonction dérivée g' est décroissante sur $]0, +\infty[$, et en utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que, si $u_0 \geq 2$, alors:

   $$0 \leq u_{n+1} - 2 \leq \frac{3}{4}(u_n - 2).$$

   v. En déduire que:

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 2).$$

EXERCICE 4. Les deux questions sont indépendantes!

I. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et posons

$$P = nX^3 - (4n+1)X^2 + 4(n+1)X - 4.$$

1. Vérifier que 2 est racine du polynôme P.
2. Quelle est sa multiplicité?

II. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme

$$Q = X^3 - 8.$$