CHAPITRE 7

Fonctions réelles : Dérivabilité

N.B. — Dans tout ce chapitre, on considère un intervalle I et une fonction f tels que:
(i) $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, c'est-à-dire un intervalle de la forme $I =]a\,;b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$.
(ii) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application. Autrement dit, $I \subset \mathcal{D}_f$, donc f est définie au moins sur I.
Rappel: Comme I est ouvert, pour tout point $x_0 \in I$, il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta\,; x_0 + \delta[\ \subset I$. Ainsi, la fonction f est définie au voisinage de x_0, et au point x_0.

1 Dérivabilité

1.1 Dérivabilité et fonction dérivée

Définition. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement de f en x_0 définie par

$$\tau_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie en x_0. Cette limite s'appelle alors *le nombre dérivé* de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$.

Proposition 1.1. (Interprétation géométrique de la dérivée) *Si f est dérivable en $x_0 \in I$, alors la droite d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ s'appelle la tangente à la représentation graphique C_f de f en x_0. C'est la droite passant par le point $(x_0, f(x_0))$ et de pente $f'(x_0)$.*

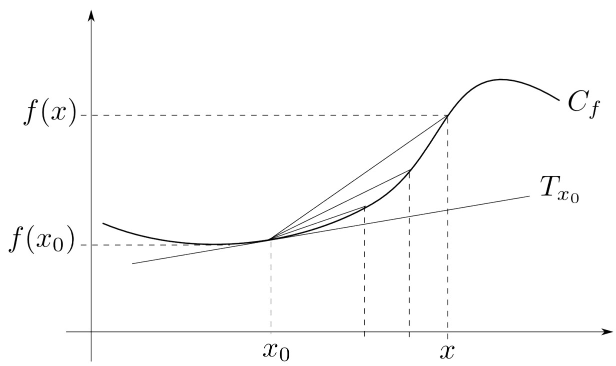

Figure 1: *Taux d'accroissement et tangente à la courbe.*

Cela implique que si la fonction f est dérivable au point x_0, alors on a

$$\forall x \in I\,,\ f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\big(f'(x_0) + \epsilon(x - x_0)\big)$$

avec $\lim \epsilon(y) = 0$ lorsque $y \to 0$.

Remarque. Ce dernier résultat admet une réciproque: l'existence d'un développement de f de ce type au voisinage de x_0 assure que f est dérivable en x_0.

Le plus souvent on posera $x = x_0 + h$, donc le taux d'accroissement s'écrit également:

$$\delta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

et la dérivée (quand elle existe) est obtenue en prenant la limite quand $h \to 0$ de $\delta_{x_0}(h)$.

Remarque. Si $\lim \tau_{x_0}(x) = +\infty$ ou $-\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0 mais sa courbe représentative admet une tangente verticale au point x_0. C'est par exemple le cas pour la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ définie sur $\mathbb{R}$, en $x_0 = 0$.

Proposition 1.2. *Soit $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Attention, la réciproque de cette proposition est fausse ! (contre-exemple typique: $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$).

Définition. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, la fonction $f' : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$ s'appelle *la fonction dérivée* de f.

1.2 Dérivabilité à gauche, à droite

Définition.

1. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si τ_{x_0} admet une limite finie à gauche en x_0. Cette limite s'appelle alors *le nombre dérivé à gauche* de f en x_0 et est noté $f'_g(x_0)$.

2. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable à droite en x_0 si τ_{x_0} admet une limite finie à droite en x_0. Cette limite s'appelle alors *le nombre dérivé à droite* de f en x_0 et est noté $f'_d(x_0)$.

Proposition 1.3. *Soit $x_0 \in I$. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$. Dans ce cas, $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

Remarque. On peut étendre la notion de fonction dérivable à un intervalle fermé $[a\,;b]$ lorsque la fonction f est dérivable sur $]a\,;b[$, et est dérivable à droite en a, dérivable à gauche en b. Mais nous nous en tiendrons dans ce cours uniquement aux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$.

1.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 1.4. *Soient f et g deux fonctions dérivables en $x_0 \in I$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors:*

* *$f + g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$*
* *λf est dérivable et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$*
* *fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$*
* *Si $g(x_0) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$*

On déduit de cette proposition que la somme, le produit, le quotient (lorsque celui-ci est bien défini !) de fonctions dérivables sur un intervalle est dérivable sur cet intervalle.

Proposition 1.5. *Soient I et J deux intervalles ouverts et soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.*

* *Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\,.$$

$*$ *Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'\,.$$

Exemple. Soit $h(x) = \cos(x^2 + 4)$ sur $\mathbb{R}$. Alors $h = g \circ f$ avec $f(x) = x^2 + 4$ et $g(y) = \cos(y)$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$. Alors $f'(x) = 2x$, $g'(y) = -\sin(y)$ et donc $h'(x) = -\sin(f(x)) \cdot 2x = -2x \sin(x^2+4)$. Calculer de même $(f \circ g)'$.

Proposition 1.6. *Soient I et J deux intervalles ouverts. On suppose que $f : I \longrightarrow J$ est bijective.*

$*$ *Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

$*$ *Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur I et*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Exemple 1. Soit $f : \mathbb{R} \to]0\,;+\infty[$, $f(x) = e^x$. Alors sa bijection réciproque est $f^{-1}(y) = \ln(y)$, définie de $]0\,;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de dérivation de la réciproque:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$$

et on retrouve bien la dérivée du logarithme.

Exemple 2. Soit$f :]0\,;+\infty[\to]1\,;+\infty[$, $f(x) = x^3 + 1$. Alors f est bijective et sa réciproque $f^{-1} :]1\,;+\infty[\to]0\,;+\infty[$ est définie par $f^{-1}(y) = (y-1)^{1/3}$. Puisque $f'(x) = 3x^2$, pour tout $y \in [1\,;+\infty[$, $f' \circ f^{-1}(y) = 3\{(y-1)^{1/3}\}^2$ et on en déduit $(f^{-1})'(y) = 1/(3(y-1)^{2/3})$, ce qui peut se retrouver par calcul direct.

2 Etude des fonctions dérivables

2.1 Extremum local et Théorème de Rolle

Définition. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

1. On dit que f admet un maximum local en x_0 si f est majorée par $f(x_0)$ au voisinage de x_0.
2. On dit que f admet un minimum local en x_0 si f est minorée par $f(x_0)$ au voisinage de x_0.

On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum ou un minimum local en x_0.

Attention, dire que f admet un maximum local en x_0 ne signifie pas que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in I$: cette inégalité est seulement vraie *au voisinage* de x_0. Un contre-exemple typique est celui de la fonction $f(x) = (x^2 - 1)^2$ sur $I = \mathbb{R}$, qui admet un maximum local au point $x_0 = 0$.

Théorème 2.1. *Si f admet un extremum local en $x_0 \in I$ et f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Remarque. La réciproque du Théorème 2.1 est fausse (penser à la fonction $x \mapsto x^3$): il s'agit d'une condition nécessaire mais pas suffisante. En pratique, pour trouver les extrema locaux de f on tracera le tableau de variations de f.

Théorème 2.2. *(Théorème de Rolle)*
Si f est continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2.2 Accroissements finis

Le théorème des accroissements finis généralise le théorème de Rolle dans le cas où $f(a) \neq f(b)$.

Théorème 2.3. *(Théorème des accroissements finis)*
Si f est continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$, alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$.

Remarques:
(i) le point c obtenu dans les théorèmes 2.2 et 2.3 n'est pas unique en général;
(ii) le théorème 2.3 signifie que sur $[a,b]$, il existe une tangente à la courbe représentative C_f de f en c qui soit parallèle à la droite passant par les points de coordonnées $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$;
(iii) à partir du théorème des accroissement,finis, on peut obtenir des majorations et minorations de l'écart $f(a)-f(b)$ dès que l'on sait majorer/minorer la dérivée de f, *cf.* Exercices.

2.3 Dérivabilité et monotonie

Proposition 2.4. *Soit f une fonction dérivable sur I. Alors*
1. *f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ sur I;*
2. *f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ sur I;*
3. *f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ sur I.*

On rappelle que si f est dérivable sur I, elle est continue sur I.
Pour la monotonie stricte, on a une condition suffisante:

Proposition 2.5. *Soit f une fonction dérivable sur I.*
1. *Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.*
2. *Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.*

Remarque. Attention, le fait que I est un intervalle est important: si $f(x) = 1/x$, définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ mais f n'est pas globalement croissante. Elle est cependant croissante sur chaque intervalle séparemment: $I_1 =]-\infty\,;0[$ et $I_2 =]0\,;+\infty[$.

3 Asymptotes

Définition.

1. (Asymptote verticale) Si f est définie sur $]a\,;b[$ et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ alors on dit que la droite d'équation $x = b$ est asymptote verticale à la courbe représentative C_f de f au voisinage à gauche de b (Définition analogue si f à une limite infinie à droite en a).
2. (Asymptote horizontale) Si f est définie sur $]A\,;+\infty[$ ($A \in \mathbb{R}$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe représentative C_f de f au voisinage de $+\infty$ (Définition analogue si f à une limite finie en $-\infty$).
3. (Direction asymptotique) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = p \in \overline{\mathbb{R}}$ alors : si $p = \pm\infty$ (resp. si $p \in \mathbb{R}$) on dit que l'axe des ordonnées (resp. la droite d'équation $y = px$) est direction asymptotique pour C_f au voisinage de $+\infty$. (Définition analogue au voisinage de $-\infty$).
4. (Asymptote oblique) S'il existe $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = p \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - px = q$, on dit que la droite d'équation $y = px + q$ est asymptote oblique à la courbe représentative C_f au voisinage de $+\infty$. (Définition analogue au voisinage de $-\infty$). Dans le cas où $p = 0$, on retrouve la notion d'asymptote horizontale.

Remarque. Si la droite d'équation $y = px + q$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$, le signe de l'expression $\varphi(x) = f(x) - px - q$ au voisinage de $+\infty$ donnera la position de C_f par rapport à son asymptote. On a un résultat analogue en $-\infty$.

4 Dérivée seconde

4.1 Définitions et premières propriétés

Définition. Soit f une fonction dérivable sur I. On dit que f est deux fois dérivable en $x_0 \in I$ si la fonction dérivée f' est dérivable en x_0. Dans ce cas on note $f''(x_0)$ le nombre dérivé de f' en x_0.

Définition. On dit que f est deux fois dérivable sur I si f est deux fois dérivable en tout point de I. Dans ce cas, la fonction $f'' : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f''(x)$ s'appelle *la fonction dérivée seconde* de f.

Remarque. De même, se définissent le cas échéant les fonctions dérivées troisième f''', quatrième $f^{(4)}$, etc. (par convention, la dérivée d'ordre 0 de f est f).

Définition. Soit f une fonction dérivable sur I et soit $x_0 \in I$. On dit que x_0 est un point d'inflexion de f si la courbe représentative de f traverse sa tangente en x_0.

Remarque. Un point d'inflexion n'est jamais un extremum local.
Exemple typique: $f(x) = x^3$ au point $x_0 = 0$.

Proposition 4.1. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur I et $x_0 \in I$ un point tel que $f'(x_0) = 0$.*
1. *si $f'' \geq 0$ au voisinage de x_0 alors f admet un minimum local en x_0;*
2. *si $f'' \leq 0$ au voisinage de x_0 alors f admet un maximum local en x_0;*
3. *si f'' s'annule en changeant de signe en x_0 alors x_0 est un point d'inflexion de f.*

On a également le résultat suivant, utile en pratique (mais qui ne dit rien sur le cas $f''(x_0) = 0$):

Proposition 4.2. *Soit f une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$. On suppose que f est deux fois dérivable en x_0.*
1. *si $f''(x_0) > 0$ alors f admet un minimum local en x_0;*
2. *si $f''(x_0) < 0$ alors f admet un maximum local en x_0.*

5 Convexité

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si pour tout couple $(x, y) \in I^2$ et tout $t \in [0\,;1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)\ .$$

Remarques:
(i) Si on remplace l'inégalité large par une inégalité stricte, on dira que f est strictement convexe.
(ii) Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite concave si la fonction $(-f)$ est convexe.

Proposition 5.1. *(Interprétation géométrique de la convexité)*
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe alors pour tout couple de points $(x, y) \in I^2$, le segment $\big[(x, f(x)); (y, f(y))\big]$ est situé au dessus de la courbe représentative de f.

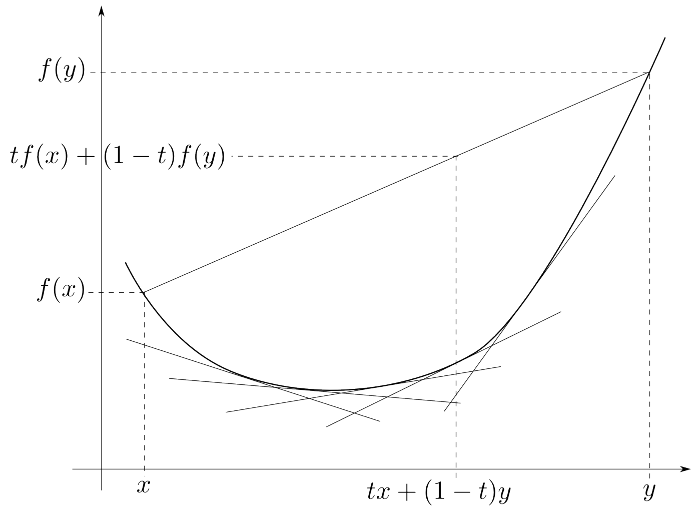

Figure 2: *Exemple de courbe représentative d'une fonction convexe.*

Proposition 5.2. *Soit f une fonction dérivable sur I. Alors f est convexe si et seulement si sa fonction dérivée f' est croissante sur I ou, de façon équivalente, si et seulement si la courbe représentative de f se situe au dessus de chacune de ses tangentes sur I.*

Proposition 5.3. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur I. Alors f est convexe si et seulement si sa fonction dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles sur I.*

Remarque. Cette dernière caractérisation permet de vérifier facilement que les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont convexes; la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0\,;+\infty[$.

Proposition 5.4. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur I, de dérivée seconde continue. Si $x_0 \in I$ est un point d'inflexion de f alors f change de concavité en x_0, c'est-à-dire, il existe un voisinage à gauche et un voisinage à droite de x_0 tels que f soit concave sur l'un et convexe sur l'autre.*