CHAPITRE 6

Systèmes linéaires, matrices et déterminants (14h)

Dans tout ce qui suit :
m, n, p, q et r sont des entiers naturels non nuls ; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et ses éléments sont appelés des scalaires.

I. Systèmes linéaires

1. Définitions

Le *système linéaire* (S) de m équations à n inconnues de coefficients $(a_{i,j})_{1\leq i\leq m,\,1\leq j\leq n}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq m}$ s'écrit :

$$(S)\left\{\begin{array}{lllll} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,n}x_n & =b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1}x_1 & +a_{i,2}x_2 & +\dots & +a_{i,n}x_n & =b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots & +a_{m,n}x_n & =b_m \end{array}\right.$$

où les $a_{i,j}$ et b_i sont des scalaires fixés et les x_j sont les inconnues.

— Le système (S) est *homogène* si $b_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$ (second membre nul).

— Le système (S) est *triangulaire supérieur* (resp. *triangulaire inférieur*) si $a_{i,j} = 0$ pour tout (i, j) tel que $i > j$ (resp. tels que $i < j$).

— Une *solution* de (S) est un n-uplet de scalaires $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ vérifiant **simultanément** les m équations de (S) et *résoudre* (S) c'est trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ de ses solutions.

— Le système (S) est *compatible* s'il admet au moins une solution ($\mathcal{S} \neq \varnothing$), et *incompatible* sinon ($\mathcal{S} = \varnothing$).
Un système homogène est compatible puisqu'il admet au moins la solution nulle : $(0, 0, \cdots, 0)$.

— Deux systèmes sont *équivalents* s'ils ont les mêmes solutions.

2. Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss

Les opérations suivantes sur les équations (les lignes) de (S) s'appellent **opérations élémentaires** :
- échanger deux équations (deux lignes) du système, que l'on code : $L_p \leftrightarrow L_q$ avec $p \neq q$;
- multiplier une équation (une ligne) par un scalaire $\lambda \neq 0$, que l'on code : $L_p \leftarrow \lambda L_p$;
- ajouter à une équation un multiple d'une **autre** équation, que l'on code : $L_p \leftarrow L_p + \lambda L_q$ avec $p \neq q$.

On prouve que par des opérations élémentaires on passe d'un système à un système qui lui est équivalent.

La *méthode du pivot de Gauss* est un algorithme qui consiste à transformer, au moyen des *opérations élémentaires*, le système linéaire initial (S) en un système triangulaire supérieur (*un système échelonné*) équivalent (S')(donc facile à résoudre « par remontée »).
On prouve qu'un système linéaire admet : 0, 1 ou une infinité de solutions.

3. Interprétations d'un système linéaire

— Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n = 2$ (resp. $n = 3$) la résolution du système linéaire (S) de la première page peut s'interpréter géométriquement comme la recherche de l'ensemble des coordonnées des points d'intersection de m droites du plan (resp. de m plans de l'espace).

— Dans tous les cas, la résolution de (S) peut s'interpréter comme la recherche de l'ensemble des antécédents de $b = (b_1, b_2, ..., b_m)$ par l'application (linéaire) f de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$ définie par :

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}x_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}x_j).$$

Par exemple : résoudre $(S) \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 1 \\ x - 4y + z = -2 \end{array} \right.$ dans $\mathbb{R}^3$ c'est chercher :

- l'ensemble des coordonnées des points d'intersection des deux plans de l'espace d'équations respectives : $2x - 3y + z = 1$ et $x - 4y + z = -2$;

- l'ensemble des antécédents de $b = (1, -2)$ par l'application (linéaire) f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y, z) = (2x - 3y + z, x - 4y + z)$.

II. Matrices

1. Définitions

Une *matrice* A de format (de taille ou de type) (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau rectangulaire de scalaires (c-à-d : d'éléments de $\mathbb{K}$) à m lignes et n colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Chaque coefficient de A est repéré par son indice de ligne (toujours donné en premier) et son indice de colonne : $a_{i,j}$ est le scalaire situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne du tableau.

De manière plus concise, on écrira : $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ ou encore plus simplement $A = (a_{i,j})$ lorsque son format est connu.

On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on a : $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ (toute matrice réelle est une matrice complexe).

Deux matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont égales si, et seulement si, elles sont de même type et leurs coefficients sont égaux ($a_{i,j} = b_{i,j}$ pour tout (i, j)), ce qui se note : $A = B$.

2. Matrices particulières

— Dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, la matrice nulle est celle dont tous les coefficients sont nuls ;
on la note $\mathcal{O}_{m,n}$ ou $\mathcal{O}$ lorsque son format est connu.

— Une matrice ligne est un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, une matrice colonne un élément de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$,

— $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées ($m = n$) d'ordre n et se note plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On peut identifier $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$.

— Lorsque $A = (a_{i,j})$ est une matrice carrée d'ordre n , sa diagonale est le n-uplet $(a_{1,1}, ..., a_{n,n})$ de ses coefficients diagonaux.

— Une matrice *diagonale* est une matrice carrée A dont tous les coefficients sont nuls, sauf éventuellement ceux de sa diagonale : $a_{i,j} = 0$ pour tout (i, j) tel que $i \neq j$.

— La *matrice identité* d'ordre n est la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée I_n ou I, de diagonale $(1, ..., 1)$: $I_n = (\delta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, où $\delta_{i,j}$ est le *symbole de Kronecker* défini par :
$\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon.

— Une matrice *triangulaire supérieure* (resp. *triangulaire inférieure*) d'ordre n est une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients « au-dessous » (resp. « au-dessus ») de sa diagonale sont nuls : $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ (resp. si $i < j$).

3. Opérations sur les matrices

Addition

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ des matrices de **même type** (m, n).

La matrice somme de A et B est la matrice $S = (s_{i,j})$ de type (m, n) définie par : $s_{i,j} = a_{i,j}+b_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$. On écrit : $S = A + B$.

La somme matricielle $A + B$ n'existe que si A et B ont la même taille.

Cette addition dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ a les mêmes propriétés que dans $\mathbb{K}$ (on effectue $m \times n$ additions dans $\mathbb{K}$) : $\forall(A, B, C) \in (\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}))^3$,

$A + B = B + A$ (commutativité) ; $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité) ;

$\mathcal{O}_{m,n} + A = A + \mathcal{O}_{m,n} = A$ ($\mathcal{O}_{m,n}$ est l' élément neutre) ;

A admet une matrice opposée, notée $-A$, celle dont les coefficients sont les opposés de ceux de A.

La différence $B - A$ est la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ égale à $B + (-A) = (b_{i,j} - a_{i,j})$.

Multiplication par un scalaire

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

La matrice notée $\lambda.A$ ou λA est la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ définie par : $\lambda A = (\lambda a_{i,j})$.

En particulier : $-1.A = -A$; $0.A = \mathcal{O}_{m,n}$ et $1.A = A$.

Produit matriciel Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,\mathbf{p}}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbf{p},n}(\mathbb{K})$.

La matrice produit de A et B (pris dans cet ordre) est la matrice $P = (p_{i,j})$ de type (m, n) où :

$p_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$ pour tout $(i, j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$.

On l'écrit : $P = A \times B$ ou $P = A.B$ ou $P = AB$.

Remarques aide-mémoire :

$p_{i,j}$ est le « produit scalaire » de la i-ème ligne de A par la la j-ème colonne de B et « $(m, \mathbf{p}) \times (\mathbf{p}, n) = (m, n)$ »

Le produit AB n'existe que si le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B

Par exemple : si $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{K})$, BA existe et appartient à $\mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{K})$ mais AB n'existe pas.

Si $A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ alors, AB et BA existeront simultanément si, et seulement si, $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ et dans ce cas, $AB \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$; mais, même lorsque $p = m$, en général $AB \neq BA$: **le produit matriciel est non commutatif**.

Ultérieurement, vous verrez que ce produit « biscornu » a été construit pour représenter la composition de certaines applications : les applications linéaires.

Règles de calcul

$\forall (A_1, A_2, B_1, B_2, C_1) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2 \times (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}))^2 \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \quad ; \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

a) $I_n.A_1 = A_1.I_p = A_1$

b) $\mathcal{O}_{m,n}.A_1 = \mathcal{O}_{m,p}$ et $A_1.\mathcal{O}_{p,m} = \mathcal{O}_{n,m}$

c) $\lambda(A_1B_1) = (\lambda A_1)B_1 = A_1(\lambda B_1)$ **Attention** au format des matrices

d) $(A_1 + A_2)B_1 = A_1B_1 + A_2B_1$

e) $A_1(B_1 + B_2) = A_1B_1 + A_1B_2$

f) $(A_1B_1)C_1 = A_1(B_1C_1)$

Le plus souvent, les calculs matriciels s'effectueront dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A et B appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors, $A+B$, AB et BA existent et appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: l'addition et le produit sont des *lois de composition interne* dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I_n est l'élément neutre du produit : a),

celui-ci est associatif : f),

distributif à droite : d) et à gauche : e) par rapport à l'addition.

Attention à ne pas oublier que dès que $n \geqslant 2$, le produit matriciel n'est pas commutatif (c-à-d : on n'a pas toujours $AB = BA$) et que l'on peut avoir :

$AB = \mathcal{O}_n$ avec $A \neq \mathcal{O}_n$ et $B \neq \mathcal{O}_n$.

Puissances d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La suite des puissances de A, (A^p), se définit comme suit par récurrence :

$A^0 = I_n$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*, A^p = A^{p-1}.A = A.A^{p-1}$.

Par exemple : $\forall p \in \mathbb{N}; \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $I_n^p = I_n$ et $(\lambda I_n)^p = \lambda^p I_n$

Lorsque $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **commutent** (c-à-d : $AB = BA$), pout tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ (formule du binôme) ;
- $(AB)^p = A^p B^p$;
- $A^p - B^p = (A - B)(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k})$ (égalité de Bernoulli) .

λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$ commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $(\lambda I_n).A = A.(\lambda I_n) = \lambda A$.

Par exemple : $(A + \lambda I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} A^k$ et $A^p - I_n = A^p - I_n^p = (A - I_n)(\sum_{k=0}^{p-1} A^k)$

4. Transposition

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

La *transposée* de A est la matrice $(\alpha_{i,j})$ de type (n, m), notée ${}^tA$, où :

$\alpha_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., m\}$;

autrement dit, la matrice dont la i-ème ligne est la i-ème colonne de A.

La transposition vérifie les propriétés suivantes :

$\forall (A, B, C) \in (\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}))^2 \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}); \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

a) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$;

b) ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$;

c) ${}^t({}^tA) = A$;

d) ${}^t(AC) = {}^tC {}^tA$ **Attention** au changement d'ordre des facteurs .

Une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est dite *symétrique* lorsque : ${}^tA = A$;
antisymétrique lorsque : ${}^tA = -A$.
Par exemple : I_n est symétrique, $\mathcal{O}_n$ est (la seule matrice) symétrique et antisymétrique, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ n'est ni symétrique ni antisymétrique.
Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls.
La transposée d'une matrice colonne (resp. ligne) est une matrice ligne (resp. colonne).
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ${}^tA.A$ et $A.{}^tA$ existent (${}^tA.A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A.{}^tA \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$) et ces deux matrices sont symétriques d'après c) et d), mais généralement :
${}^tA.A \neq A.{}^tA$ même lorsque $m = n$.

5. Ecriture matricielle d'un système linéaire

En posant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

le système (S) de la première page peut s'écrire sous la forme matricielle : $A.X = B$.
A est la matrice de ses coefficients, B la matrice-colonne second membre et X la matrice-colonne des inconnues.

III. Déterminants

1. Définition

Le *déterminant* d'une matrice carrée A d'ordre n (un déterminant d'ordre n) est le scalaire, noté $\det(A)$ ou $\det A$ ou $|A|$, défini par récurrence (vous en verrez d'autres définitions) comme suit :

a) $n = 1$ et $n = 2$

$\det(a) = a$; $\quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

b) $n \geqslant 3$

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue à partir de A en supprimant sa i-ème ligne et sa j-ème colonne et $c_{i,j}$ le scalaire défini par : $c_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$ que l'on appelle le *cofacteur* de $a_{i,j}$.

Avec ces notations :

$\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}c_{i,j}$: développement suivant (par rapport) à la j-ème colonne de A

$\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}c_{i,j}$: développement suivant (par rapport) à la i-ème ligne de A

Cette définition est consistante car on prouve que le résultat d'un tel développement est indépendant de la ligne ou colonne choisie. De cette manière, le calcul d'un déterminant d'ordre n nécessite le calcul de n déterminants d'ordre $n-1$, chacun d'eux le calcul de $n-1$ déterminants d'ordre $n-2$ et ainsi de suite jusqu'à $n!/2$ calculs de déterminants d'ordre 2.

Par exemple, pour $n = 3$, le développement suivant la première colonne s'écrit :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

En développant cette expression, on obtient :

$\Delta = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2}$,

formule que l'on peut retrouver grâce à *la règle de Sarrus* (qui n'est valable que pour n=3).

Par développements successifs suivant les premières lignes :

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) \times 5 \times 1 = -30$$

Ce dernier exemple se généralise (par récurrence sur n) comme suit :

Si $T = (t_{i,j})$ est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) d'ordre n alors,

$\det T = t_{1,1} \times t_{2,2} \times ... \times t_{n,n}$: le produit de ses coefficients diagonaux.

Par exemple : $\det(\lambda I_n) = \lambda^n$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$; en particulier : $\det(I_n) = 1^n = 1$ et $\det(\mathcal{O}_n) = 0^n = 0$.

2. Propriétés

Seules les matrices carrées possèdent un déterminant.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

a) $\det(AB) = \det A \times \det B = \det(BA)$

On en déduit (récurrence sur l) que : $\det(A^l) = (\det A)^l$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.

Attention, en général : $\det(A + B) \neq \det A + \det B$

b) $\det({}^tA) = \det(A)$

Par conséquent, toute propriété des déterminants concernant ses colonnes reste valable pour ses lignes.

c) L'échange de deux colonnes (resp. deux lignes) d'un déterminant multiplie ce déterminant par -1.

La multiplication d'une colonne (resp. une ligne) d'un déterminant par un scalaire λ multiplie ce déterminant par λ.

Par conséquent, si deux colonnes (resp. deux lignes) d'un déterminant sont proportionnelles (par exemple égales) ce déterminant est nul ; en particulier, si les coefficients d'une colonne (resp. d'une ligne) d'un déterminant sont tous nuls, ce déterminant est nul.

$\det(\lambda A) = \lambda^{\mathbf{n}}. \det A$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K})$.

d) La valeur d'un déterminant est inchangé si l'on ajoute à l'une de ses colonnes (resp. l'une de ses lignes) un multiple d'une **autre** colonne (resp. d'une **autre** ligne).

Les propriétés c) et d) permettent :

soit de prouver la nullité du déterminant ;

soit de construire une colonne (resp. une ligne) avec un « maximum » de zéros permettant un développement plus facile suivant cette colonne (resp. cette ligne).

IV. Matrices inversibles

1. Définition.

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible* si, et seulement si, il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$AB = I_n$ (inverse à droite) et $BA = I_n$ (inverse à gauche).

On prouve que lorsque B existe, elle est unique ; on l'appelle *l'inverse* de A et la note : A^{-1}.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Seules les matrices carrées peuvent être inversibles.

Puisque $I_n^2 = I_n$, I_n est inversible ($I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) et $I_n^{-1} = I_n$.

Pour toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{O}_n.B = B.\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_n$ donc, $\mathcal{O}_n$ n'est pas inversible.

2. Propriétés.

Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

a) $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ **Attention** au changement d'ordre des facteurs

c) ${}^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1})$

d) $A^l \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^l)^{-1} = (A^{-1})^l$, pour tout $l \in \mathbb{N}$

Lorsque A est inversible, pour tout $l \in \mathbb{N}$, on note : $A^{-l} = (A^l)^{-1} = (A^{-1})^l$.

Attention, une écriture du type A^{-4} n'a de sens que si A est inversible et dans ce cas :
$A^{-4} = (A^{-1})^4 = (A^4)^{-1}$.

Puisque si A est inversible, alors : $1 = \det(I_n) = \det(A.A^{-1}) = \det(A).\det(A^{-1})$, on en déduit :

e) $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

3. Définition.

La *comatrice* d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $com(A)$,
dont les coefficients sont les cofacteurs des coefficients de A : $com(A) = (c_{i,j})$.

On rappelle que : $c_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$ où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue à partir de A en supprimant
sa i-ème ligne et sa j-ème colonne.

Par exemple pour $n = 2$: $com(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

4. Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) $A.{}^tcom(A) = {}^tcom(A).A = \det(A)I_n$

b) A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

Autrement dit, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \det(M) \neq 0\}$

c) Si A est inversible alors, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}{}^t(com(A))$

Par exemple pour $n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) = ad - bc \neq 0$

Si $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ alors, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

En particulier, une matrice triangulaire $T = (t_{i,j})$ est inversible si, et seulement si, aucun de ses coefficients diagonaux n'est nul : pour tout $i, t_{i,i} \neq 0$.

Lorsque A est inversible ($\det(A) \neq 0$), la définition de sa comatrice nécessite le calcul de n^2 déterminants d'ordre $n - 1$, donc utiliser c) pour obtenir A^{-1} devient malcommode dès que $n \geqslant 4$ (pour $n = 4$, il faut calculer 16 déterminants d'ordre 3, soit $16 \times 3 = 48$ déterminants d'ordre 2).

Le plus souvent A^{-1} s'obtiendra par la résolution d'un système linéaire (voir V) ;

mais parfois, il suffira de revenir à la définition en utilisant une équation polynomiale vérifiée par A.

Par exemple : Si $A^2 - 3A - 2I = \mathcal{O}$ (c-à-d : $P(A) = \mathcal{O}$ où $P(x) = x^2 - 3x - 2$)

P est un polynôme annulateur de A et alors,

$A^2 - 3A = 2I$ donne $A(A - 3I) = 2I$ soit $A(\dfrac{1}{2}(A - 3I)) = (\dfrac{1}{2}(A - 3I))A = I$.

A est inversible (sans calcul de déterminant) et $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A - 3I)$.

V. Résolution des systèmes linéaires carrés

On rappelle que le système linéaire (S) du paragraphe I.1 d'écriture matricielle : $A.X = B$,

où $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice des coefficients du système,
$B = (b_i)_{1 \leq i \leq m}$ la matrice-colonne second membre et X la matrice-colonne des inconnues est *carré* si, et seulement si, $m = n$ (c-à-d : lorsqu'il a autant d'équations que d'inconnues).

Lorsque A est inversible, nous allons donner trois méthodes de résolution des systèmes linéaires carrés.

1. Méthode du pivot de Gauss

Elle reste valable et est celle qui généralement minimise les calculs.

2. Utilisation de l'inverse

Proposition.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible alors, le système (S) : $A.X = B$ admet une unique solution : $X = A^{-1}B$.

En effet, $A.X = B$ équivaut alors successivement à : $A^{-1}.(A.X) = A^{-1}B$;

$(A^{-1}A).X = A^{-1}B$ (associativité du produit) ; $I_n.X = A^{-1}B$, soit finalement : $X = A^{-1}B$.

En particulier, si A est inversible, la solution nulle : $(0, 0, ..., 0)$ est la seule solution du système homogène $A.X = \mathcal{O}_{n,1}$.

La connaissance de A^{-1} donne l'unique solution de (S) et réciproquement, A^{-1} peut se déterminer en résolvant le système : $A.X = Y$ pour une matrice-colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ arbitraire.

3. Formules de Cramer

Théorème.

Soit (S) le système carré d'écriture matricielle : $A.X = B$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont données et X est la matrice colonne des inconnues : $x_1, ..., x_n$.

Notons A_j la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en remplaçant la j-ième colonne de A par la matrice-colonne second membre B.

- Si $\det(A) \neq 0$ alors, l'unique solution de (S) est donnée par *les formules de Cramer* :

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \quad \text{pour} \quad j \in \{1, \cdots, n\}.$$

- Si $\det(A) = 0$ alors, le système (S) n'admet aucune solution (système incompatible) ou admet une infinité de solutions (système sous-déterminé).

Par conséquent,(S) **admet une unique solution si, et seulement si,** A **est inversible.**

Dès que $n \geqslant 4$, les formules de Cramer (comme le c) du théorème 4.IV) présentent un intérêt plus théorique que pratique.