

CHAPITRE 5

Fonctions réelles : limites et continuité

1 Généralités

(i) Une *fonction* f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est une association qui, à $x \in \mathbb{R}$ associe au plus une valeur $f(x)$ dans \mathbb{R} ; il existe donc potentiellement certaines valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ n'est pas défini.

(ii) L'*ensemble de définition* de f , noté \mathcal{D}_f , est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ est défini. Ainsi, $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ est une application.

(iii) Le plan étant rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la *courbe représentative* \mathcal{C}_f de f est l'ensemble des points dont les coordonnées appartiennent au graphe de f , défini par : $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = f(x)\}$.

(iv) Dans la définition d'une fonction, la variable souvent notée x est une variable dite *muette* (comme dans les sommes): les expressions $f(x) = 3x^2 - 1$, $f(y) = 3y^2 - 1$ et $g(P) = 3P^2 - 1$ définissent la même fonction.

Exemple: l'expression $f(x) = 1/x$ définit une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dont l'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; l'expression $g(Q) = \sqrt{Q} - 2e^Q$ définit une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dont l'ensemble de définition est $\mathcal{D}_g = [0; +\infty[$.

Dans toute la suite, f désigne une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et \mathcal{D}_f son ensemble de définition.

1.1 Définitions

Définition. Soit A une partie non vide de \mathcal{D}_f . On dira que :

1. f est *majorée* (respectivement *minorée*) sur A s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in A, f(x) \leq a \text{ (respectivement } f(x) \geq a).$$

2. f est *bornée* sur A si elle est majorée et minorée sur A , c'est-à-dire :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in A, a \leq f(x) \leq b$$

De manière équivalente, f est *bornée* sur A s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in A$.

On sait que toute partie non vide majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure et toute partie minorée non vide de \mathbb{R} admet une borne inférieure. Ces propriétés sont à la source même de la construction des nombres réels. Il en découle immédiatement que si f est majorée (respectivement minorée) sur A alors $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ admet une *borne supérieure* (respectivement *borne inférieure*) notée $\sup_{x \in A} f(x)$ (respectivement $\inf_{x \in A} f(x)$).

On appelle intervalle de \mathbb{R} toute partie I de \mathbb{R} vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in \mathbb{R}, x \leq t \leq y \implies t \in I.$$

Définition. (Monotonie sur un intervalle) Soit I un intervalle de \mathbb{R} inclus dans \mathcal{D}_f .

1. f est *croissante* (respectivement *décroissante*) sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \text{ (respectivement } f(x) \geq f(y)).$$

2. f est *strictement croissante* (respectivement *strictement décroissante*) sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) < f(y) \text{ (respectivement } f(x) > f(y)).$$

3. f est (*strictement*) *monotone* sur I si f est (strictement) croissante ou décroissante sur I .

1.2 Voisinages

Définition. (Voisinages)

1. f est définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ si $(\exists \delta > 0),]a - \delta; a + \delta[\setminus \{a\} \subset \mathcal{D}_f$.
2. f est définie dans un voisinage à gauche de $a \in \mathbb{R}$ si $(\exists \delta > 0),]a - \delta; a[\subset \mathcal{D}_f$.
3. f est définie dans un voisinage à droite de $a \in \mathbb{R}$ si $(\exists \delta > 0),]a; a + \delta[\subset \mathcal{D}_f$.
4. f est définie au voisinage de $+\infty$ si $(\exists A \in \mathbb{R}),]A; +\infty[\subset \mathcal{D}_f$.
5. f est définie au voisinage de $-\infty$ s'il existe $(\exists A \in \mathbb{R}),]-\infty; A[\subset \mathcal{D}_f$.

Remarque importante : Dans les cas 1-2-3, on ne suppose pas que la fonction est définie en a . Dans ce qui suit, il n'est pas nécessaire qu'elle soit définie en a lorsque l'on étudie sa limite éventuelle en a , mais elle doit l'être lorsque l'on examine sa propriété de continuité ou de dérivabilité au point a .

Définition. (Propriétés au voisinage)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est définie au voisinage de a . On dira qu'une propriété (P) portant sur f est vraie au voisinage de a s'il existe $\delta > 0$ tel que la propriété est vraie sur $]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$.

De même, si f est définie au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$): on dira qu'une propriété (P) portant sur f est vraie au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété est vraie sur $\mathcal{D}_f \cap]A, +\infty[$ (respectivement $\mathcal{D}_f \cap]-\infty, A[$).

2 Limites

2.1 Définitions

On introduit la notation suivante $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction réelle définie au voisinage de a (fini ou non).

Définition. On dit que f admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ comme limite en a si:

Cas $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$: $(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \mathcal{D}_f) (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon)$.

Cas $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$: $(\forall B \in \mathbb{R}) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \mathcal{D}_f) (|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > B)$.

Cas $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$: $(\forall \epsilon > 0) (\exists A \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathcal{D}_f) (x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon)$.

Cas $a = -\infty$ et $\ell = +\infty$: $(\forall B \in \mathbb{R}) (\exists A \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathcal{D}_f) (x < A \Rightarrow f(x) > B)$.

Remarque. Si la fonction f est définie en $a \in \mathbb{R}$ et admet une limite ℓ en a alors on a $f(a) = \ell$.

Théorème 2.1. Si f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a alors cette limite est unique. On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Remarque. Les trois résultats suivants sont évidents et très utiles :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 &\iff \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 && (a \in \overline{\mathbb{R}}), \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell &\iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \ell = 0 && (a \in \overline{\mathbb{R}}, \ell \in \mathbb{R}), \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell &\iff \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) - \ell = 0 && (a, \ell \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Proposition 2.2 (caractérisation séquentielle de la limite). Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.
2. Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathcal{D}_f de limite a , $f(x_n)$ a pour limite ℓ .

Remarque. La proposition donne une méthode pour prouver qu'une fonction n'a pas de limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Il suffit pour cela de trouver deux suites (x_n) et (x'_n) tendant toutes deux vers $a \in \mathcal{D}_f$ telles que $f(x_n) \rightarrow \ell$ et $f(x'_n) \rightarrow \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

2.2 Limites à gauche, limites à droite

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Soit f une fonction définie dans un voisinage à gauche de a . On dit que f admet une *limite à gauche* au point a si $f(x) \rightarrow \ell$ lorsque $x \rightarrow a$, avec $x < a$. Dans ce cas, cette limite est unique et on note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$.
2. Soit f une fonction définie dans un voisinage à droite de a . On dit que f admet une *limite à droite* au point a si $f(x) \rightarrow \ell$ lorsque $x \rightarrow a$, avec $x > a$. Dans ce cas, cette limite est unique et on note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$.

Étant donnée une fonction f dont le domaine de définition est \mathcal{D}_f , il est parfois utile de restreindre son domaine de définition à un sous-ensemble $A \subset \mathcal{D}_f$. La nouvelle fonction obtenue est appelée la restriction de f à A (et la notation est $f|_A$) dans le sens où la même formule définit cette nouvelle fonction, et seul son domaine de définition change.

Ainsi, Dire que f admet une limite à gauche en $x = a$ est équivalent à dire que la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap]-\infty; a[$ admet une limite ℓ en a . De même pour la limite à droite, avec la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap]a; +\infty[$.

Proposition 2.3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit f une fonction réelle définie au voisinage de a .

- Si f est définie en a alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \left(\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \text{ et } f(a) = \ell \right).$$

- Si f n'est pas définie en a alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell.$$

2.3 Propriétés des limites

Proposition 2.4. Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a .

Proposition 2.5. Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f admet une limite finie ℓ non nulle en a alors f est du même signe que ℓ au voisinage de a .

Proposition 2.6 (Conservation des inégalités *larges* par passage à la limite). Si $f \leq g$ au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.

Remarque. Dans l'énoncé de la propriété précédente, même si $f < g$ (inégalité *stricte*) au voisinage de a , on n'obtiendra à la limite que $\ell \leq \ell'$ (inégalité *large*).

2.4 Théorèmes d'existence

Proposition 2.7. (*Opérations sur les limites*) Les résultats du chapitre *Suites Réelles* s'étendent aux fonctions (avec les mêmes formes indéterminées).

Proposition 2.8. (*composition de limites*) Soient f, g deux fonctions réelles telles que f est définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et g est définie au voisinage de $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si } \left(f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \text{ et } g(y) \xrightarrow{y \rightarrow \ell} \lambda \right) \text{ alors } g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda.$$

Théorème 2.9. (Théorème des gendarmes) Soient f, g, h trois fonctions réelles et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $f \leq g \leq h$ au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.
2. Si $f \leq g$ au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
3. Si $f \leq g$ au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Théorème 2.10. (Limites de fonctions monotones)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction réelle définie à gauche au voisinage de a . S'il existe $\delta > 0$ tel que f est croissante sur $]a - \delta, a[$ alors f admet une limite à gauche en a . Si de plus f est majorée sur $]a - \delta, a[$ alors cette limite est finie.
2. Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$. S'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f est croissante sur $]A, +\infty[$ alors f admet une limite en $+\infty$. Si de plus f est majorée sur $]A, +\infty[$ alors cette limite est finie.

On adapte facilement ces résultats au cas où f est décroissante.

3 Continuité

3.1 Continuité en un point

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie au voisinage de a . On suppose de plus que f est définie au point a , autrement dit que $a \in \mathcal{D}_f$.

1. f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ c'est-à-dire,

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \mathcal{D}_f) (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$
2. f est continue à gauche en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ c'est-à-dire,

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \mathcal{D}_f) (x \in]a - \delta, a] \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$
3. f est continue à droite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ c'est-à-dire,

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \mathcal{D}_f) (x \in]a, a + \delta[\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$
4. Si f n'est pas continue en a , on dira qu'elle est discontinue en a .

Proposition 3.1. Soit f une fonction définie dans un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et telle que $a \in \mathcal{D}_f$. Alors f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a .

Remarque. D'après la Proposition 2.2 on peut caractériser la continuité à l'aide des suites :

$$\left(f \text{ est continue en } a \right) \iff \left(\text{Pour toute suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ à valeur dans } \mathcal{D}_f \text{ et de limite } a, f(x_n) \rightarrow f(a) \right)$$

Nous pouvons répéter ce qui est expliqué dans la Remarque 2.1 : c'est un critère très utile en pratique pour prouver la continuité ou la discontinuité de f en un point a .

Définition. Si f est définie au voisinage d'un point a sans être définie en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors la nouvelle fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \ell & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \end{cases}$$

est continue en a . Cette fonction g est appelée le prolongement par continuité de f en a . Son domaine de définition est $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_f \cup \{a\}$. De manière évidente on définit la notion de prolongement par continuité à droite (respectivement à gauche).

Proposition 3.2. (Opérations sur les fonctions continues)

1. Si f et g sont continues en a , alors $|f|$, $f + g$ et fg sont continues en a .
2. Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a .
3. Si f est une application continue en a et g est une application continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a .

3.2 Continuité sur un intervalle

Dans cette partie, I désigne un intervalle de \mathbb{R} .

Définition. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

On déduit facilement de la Proposition 3.2 que la valeur absolue, la somme, le produit, le quotient (avec une fonction non-nulle sur I au dénominateur !) de deux fonctions continues sur I est continue sur I .

Proposition 3.3. Si f est une application continue sur I et à valeurs dans J et g est une application continue sur J , alors $g \circ f$ est continue sur I .

Théorème 3.4. (Théorème des valeurs intermédiaires) Si f est continue sur un intervalle I de \mathbb{R} , alors $f(I)$ est un intervalle de \mathbb{R} . En d'autres termes, pour tout $a, b \in I$, f atteint entre a et b toutes les valeurs (intermédiaires) entre $f(a)$ et $f(b)$.

Théorème 3.5. (fonctions continues sur un segment) Si f est continue sur le segment $[a, b]$ avec $a < b$ alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes c'est-à-dire qu'il existe des réels m et M tels que :

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

Remarque. Attention, le théorème 3.5 nécessite que l'intervalle sur lequel f est continue soit fermé et borné; on peut aisément construire des contre-exemples quand ce n'est pas le cas.

Théorème 3.6. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I alors f est une bijection de I sur $f(I)$.

Remarque. Ce théorème est très utile. Précisons-le dans deux cas particuliers :

1. Si f est continue et strictement croissante sur le segment $[a, b]$, $a < b$ alors f définit une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
2. Si f est continue et strictement croissante sur le segment $]a, b[$, alors f définit une bijection de $]a, b[$ sur $] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$
[Pourquoi ces deux dernières limites existent-elles ? Écrire un énoncé en remplaçant a par $-\infty$ et b par $+\infty$.].

Si f est strictement décroissante, **ne pas oublier d'échanger** les bornes des intervalles d'arrivée dans les énoncés ci-dessus.