CHAPITRE 4

Suites réelles

1 Suites réelles

Définition. Une **suite réelle** est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou, plus généralement, une application $u : \{n \in \mathbb{N} / n \geq k\} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $k \in \mathbb{N}$ est fixé).

Le nombre réel $u(n)$ est le **terme de rang** n de la suite u et est noté u_n.

La suite u pourra aussi être notée $(u_n)_{n\geq 0}$ (ou $(u_n)_{n\geq k}$ si elle n'est définie qu'à partir du rang k) ou simplement (u_n).

Définition. (Majorant, Minorant)

Un nombre réel M est appelé **majorant** de la suite (u_n) si : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

La suite (u_n) est dite **majorée** s'il existe un majorant, c'est-à-dire : $\exists\, M \in \mathbb{R}\,,\, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

Un nombre réel m est appelé **minorant** de la suite (u_n) si : $\forall\, n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$.

La suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe un minorant, c'est-à-dire : $\exists\, m \in \mathbb{R}\,,\, \forall\, n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$.

La suite (u_n) est dite **bornée** si elle est majorée et minorée,
c'est-à-dire : $\exists\, m \in \mathbb{R}\,,\, \exists\, M \in \mathbb{R}\,,\, \forall\, n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$
ou encore : $\exists\, A \in \mathbb{R}\,,\, \forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq A$.

Définition. La suite (u_n) est **constante** si : $\exists\, a \in \mathbb{R},\, \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n = a$.

La suite (u_n) est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang, c'est-à-dire : $\exists\, a \in \mathbb{R},\, \exists\, N \in \mathbb{N}\,,\, \forall\, n \geq N,\, u_n = a$.

La suite (u_n) est **croissante** si : $\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} \geq u_n$.

La suite (u_n) est **décroissante** si : $\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} \leq u_n$.

On parlera de suite **monotone** pour qualifier une suite croissante ou une suite décroissante.

2 Convergence, divergence

2.1 Suites convergentes

On dit qu'une suite réelle converge vers un nombre réel ℓ si pour tout intervalle ouvert contenant ℓ, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle sauf peut-être pour un nombre fini d'indices. Autrement dit, si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I.

Mathématiquement, la définition s'écrit :

Définition. La suite (u_n) est **convergente** s'il existe un nombre réel ℓ tel que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}\,,\, \forall\, n \geq N_\varepsilon,\, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Lorsqu'il existe, ce nombre réel ℓ est unique. On l'appelle la **limite** de la suite (u_n) et on dit que (u_n) **converge vers** ℓ.

On écrit $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$ ou encore $u_n \to \ell$.

Remarques.

1) $|u_n - \ell| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon \ \Leftrightarrow\ u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

2) On utilise souvent le fait que $\lim u_n = \ell$ si et seulement si $\lim |u_n - \ell| = 0$.

Exemples : Les suites réelles de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, 2^{-n} ou e^{-n} convergent vers 0.

Proposition 2.1 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.*
(i) Si $|u_n - \ell| \le v_n$ et $v_n \to 0$, alors $u_n \to \ell$.
(ii) Si (u_n) bornée et $v_n \to 0$, alors $u_n v_n \to 0$.

Proposition 2.2 *Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.*

2.2 Suites divergentes

Définition. La suite (u_n) est **divergente** si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire si :

$$\forall \ell \in \mathbb{R}\,,\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}\,,\ \exists n \ge N,\ |u_n - \ell| \ge \varepsilon.$$

Définition. On dira que (u_n) **tend vers** $+\infty$ et on écrira $u_n \to +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_A \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \ge N_A,\ u_n \ge A.$$

On dira que u_n tend vers $-\infty$, et on écrira $u_n \to -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$, si

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists N_a \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \ge N_a,\ u_n \le a.$$

Exemples : Les suites de terme général $\ln(n)$, $\sqrt{n}$, n, n^2, 2^n ou e^n tendent vers $+\infty$.

Remarques.

1) Si (u_n) tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) alors (u_n) diverge.

2) Si $u_n \to +\infty$, alors (u_n) est minorée et si $u_n \to -\infty$, alors (u_n) est majorée.

3) Si $u_n \to +\infty$ ou $u_n \to -\infty$, alors $|u_n| \to +\infty$. La réciproque est fausse [*trouver un contre-exemple*].

Proposition 2.3 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \le v_n$ à partir d'un certain rang.*
(i) Si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.
(ii) Si $v_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.

3 Opérations sur les limites et comparaisons

Dans ce qui suivra, on désignera par $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Proposition 3.1 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim v_n = \ell' \in \mathbb{R}$ alors*

$$\lim u_n + v_n = \ell + \ell' \quad \textit{et} \quad \lim u_n v_n = \ell\ell'.$$

Dans certains cas les règles de la proposition 3.1 s'étendent aux cas où ℓ ou ℓ' sont dans $\overline{\mathbb{R}}$, grâce aux règles suivantes :
si $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors $\ell + (+\infty) = +\infty$;
si $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$, alors $\ell \times (+\infty) = +\infty$;
$-(+\infty) = -\infty$.
Attention, certaines formes sont indéterminées !

Remarque. (Formes indéterminées) Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$ alors $u_n + v_n$ est une forme indéterminée, i.e. on peut obtenir des résultats différents selon les suites considérées. Il en est de même pour $u_n v_n$ si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to 0$.

Proposition 3.2 *Si (u_n) est une suite réelle telle que $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}$ et si f est une fonction continue en ℓ (voir chap. 6 pour une définition rigoureuse de la continuité), alors $f(u_n)$ est définie à partir d'un certain rang et $\lim f(u_n) = f(\ell)$.*

En particulier, si (u_n) est une suite réelle telle que $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}^*$, alors la suite $(1/u_n)$ est définie à partir d'un certain rang et $\lim 1/u_n = 1/\ell$.
Si $\lim u_n = 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\lim 1/u_n = +\infty$.
Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim 1/u_n = 0$.

Proposition 3.3 (Les inégalités larges sont préservées par passage à la limite) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Si $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$ avec $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\ell \leq \ell'$.*

Remarque. Attention, en général, lorsque $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, l'inégalité stricte $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang n'entraîne pas $\ell < \ell'$ [*trouver un contre-exemple*].

Théorème 3.4 (Théorème des gendarmes) *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u_n \leq w_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim u_n = \lim v_n = \ell$, alors $\lim w_n = \ell$.*

Remarque. Dans le théorème précédent, il est important que (u_n) et (v_n) aient même limite pour pouvoir conclure.

4 Limites de suites monotones

Théorème 4.1 *Soit (u_n) une suite réelle.*
- *(i) Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge.*
- *(ii) Si (u_n) est croissante et non majorée, alors (u_n) tend vers $+\infty$.*
- *(iii) Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge.*
- *(iv) Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors (u_n) tend vers $-\infty$.*

Remarque. Dans le cas *(i)*, $\lim u_n$ est le plus petit des majorants de (u_n). C'est la borne supérieure de l'ensemble $\{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, notée $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$.
Dans le cas *(iii)*, $\lim u_n$ est le plus grand des minorants de (u_n). C'est la borne inférieure de l'ensemble $\{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, notée $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Définition. Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim u_n - v_n = 0$.

Notons que si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec par exemple (u_n) croissante et (v_n) décroissante, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

Théorème 4.2 (Théorème des suites adjacentes) *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, si (u_n) est la suite croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$.*

Un tel encadrement peut être utile pour obtenir une valeur approchée de ℓ (cf. exercice 8).

5 Sous-suites

Définition. Une **sous-suite** (on dit aussi suite extraite) de la suite (u_n) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Proposition 5.1 *Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u_n \to \ell$, alors pour toute sous-suite $(u_{\varphi(n)})$, on a $u_{\varphi(n)} \to \ell$.*

En particulier, si la suite (u_n) possède deux sous-suites qui tendent vers deux limites différentes, alors (u_n) n'a pas de limite.

Exemple : La suite définie par $u_n = (-1)^n$ diverge car $u_{2n} \to 1$ tandis que $u_{2n+1} \to -1$.

Proposition 5.2 *Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. $u_n \to \ell$ si et seulement si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$.*

6 Suites définies par itération d'une fonction

Une suite peut être "définie par récurrence", c'est-à-dire par la donnée de son premier terme et d'une relation permettant de déduire chaque terme de la suite du précédent. C'est le cas d'une suite définie par itération d'une fonction.

Définition. Soit f une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans lui-même. La suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné dans } I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

est la suite de premier terme u_0 définie par itération de la fonction f.

Proposition 6.1 *Soit (u_n) une suite définie comme précédemment, si $\lim u_n = \ell$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.*

Remarque. Pour une suite (u_n) définie comme précédemment :

Si f est croissante alors la suite (u_n) est monotone (croissante si $u_0 \leq u_1$, décroissante sinon).

Si f est décroissante alors les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante.