CHAPITRE 3

Logique, Ensembles et Applications

1 Langage mathématique et logique

1.1 Ensembles

Un ensemble est une collection d'objets distincts ; ces objets s'appellent les éléments de cet ensemble.

Notations :
$x \in E$ signifie x appartient à l'ensemble E (ou x est élément de E).
$x \notin E$ signifie x n'appartient pas à l'ensemble E.
$A \subset E$ signifie que A est **une partie** (ou un **sous-ensemble**) de E, c'est-à-dire que tout élément de A appartient à E.
On note $\emptyset$ **l'ensemble vide**. Pour tout ensemble E, $\emptyset \subset E$.
$A = \{x \in E \mid x \text{ vérifie } P\}$ signifie que A *est l'ensemble de tous les éléments de* E *ayant la propriété* P.
L'ensemble $\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$ est l'ensemble des parties de E.

Définitions. Soient A et B des parties d'un ensemble E.

L'**intersection** des ensembles A et B est $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$. Les ensembles A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

L'**union** des ensembles A et B est $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ (Attention le **ou** est non exclusif !).

$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$ est l'ensemble A **privé de** B, également noté $C_A(B)$ (complémentaire de B dans A).
Si $A \subset E$ au lieu de $C_E(A)$, on écrira A^c et on lira **complémentaire** de A.

L'ensemble $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$ est le **produit cartésien** de A et B.
Le produit cartésien d'une suite d'ensembles E_1, E_2, ... , E_n est l'ensemble

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

Dans le cas où tous les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont égaux à E, le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ se note E^n.

Proposition 1.1 *Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.*

(i) Commutativité :

$$A \cap B = B \cap A \quad et \quad A \cup B = B \cup A.$$

(ii) Associativité :

$$\big(A \cap B\big) \cap C = A \cap \big(B \cap C\big) = A \cap B \cap C \quad et \quad \big(A \cup B\big) \cup C = A \cup \big(B \cup C\big) = A \cup B \cup C.$$

(iii) Distributivité :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad et \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(iv) Lois de Morgan :

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad et \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

1.2 Assertions, Prédicats

Une **assertion** P est un énoncé auquel on peut attribuer l'une des deux valeurs de vérité : Vrai ou Faux.
Par exemple :
- "3 est un entier pair" est une assertion fausse.
- "Pour tout nombre réel x, x^2 est un nombre réel positif" est une assertion vraie.

Couramment, affirmer P signifie que l'assertion P est vraie.

Un énoncé du type "l'entier naturel x est pair" n'est pas une assertion car on ne peut pas lui donner de valeur de vérité tant qu'on ne connaît pas l'entier naturel x. On parlera alors de prédicat sur $\mathbb{N}$. De manière générale, on dira que $P(x)$ est un **prédicat** sur un ensemble E si lorsque l'élément $x \in E$ est spécifié, $P(x)$ est une assertion.
Par exemple, si $P(x)$ est le prédicat "l'entier x est pair", alors $P(2)$ est une assertion vraie, $P(3)$ est une assertion fausse.

On dira que deux assertions P et Q sont équivalentes si elles ont la même valeur de vérité et on notera $P \Leftrightarrow Q$. On dira que deux prédicats sur E sont équivalents s'ils donnent pour chaque élément de E deux assertions équivalentes.

1.3 Connecteurs logiques

En utilisant des connecteurs logiques, on peut, à l'aide d'assertions (ou de prédicats), fabriquer de nouvelles assertions (resp. prédicats).

Si P et Q sont deux assertions, on définit les assertions (P et Q), (P ou Q) et la négation de P, NON(P) par :
- (P et Q) qui est vraie si et seulement si les deux assertions sont vraies,
- (P ou Q) qui est vraie si et seulement si au moins l'une des deux assertions est vraie,
- NON(P) qui est vraie si et seulement si P est fausse.

Propriétés. NON(NON(P)) $\Leftrightarrow P$,

NON(P et Q) $\Leftrightarrow$ (NON(P) ou NON(Q)),

NON(P ou Q) $\Leftrightarrow$ (NON(P) et NON(Q)).

On définit aussi l'assertion $P \Rightarrow Q$ (lire P implique Q) par (NON(P) ou Q). Remarquons que $P \Rightarrow Q$ n'est fausse que lorsque P est vraie et Q fausse.
On appelle implication réciproque l'assertion $Q \Rightarrow P$.

Propriétés. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow$ (NON(Q) $\Rightarrow$ NON(P)) *(contraposée)*,

NON($P \Rightarrow Q$) $\Leftrightarrow$ (P et NON(Q)),

en général, $P \Rightarrow Q$ et sa réciproque $Q \Rightarrow P$ ne sont pas équivalentes,

$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P))$.

On utilise les mêmes connecteurs logiques à partir de prédicats.

1.4 Quantificateurs

Si E est un ensemble et $P(x)$ un prédicat sur E, à l'aide des quantificateurs $\forall$ (pour tout) et $\exists$ (il existe), on définit les assertions suivantes :
- $(\forall x \in E,\ P(x))$ qui est vraie si et seulement si tous les éléments e de E donnent une assertion $P(e)$ vraie.

- $(\exists\, x \in E,\, P(x))$ qui est vraie si et seulement si au moins un élément e de E donne une assertion $P(e)$ vraie.

Attention, en présence de plusieurs quantificateurs, l'ordre compte !
Par exemple, les assertions

$$\forall\, x \in \mathbb{N}, \exists\, y \in \mathbb{N}, x < y \quad \text{et} \quad \exists\, y \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{N}, x < y$$

ne sont pas équivalentes. La première est vraie tandis que la seconde est fausse.
En revanche, en échangeant deux quantificateurs identiques, on obtient toujours deux assertions équivalentes.

1.5 Négations et quantificateurs

La négation opère de la façon suivante :
NON$(\,\forall\, x \in E,\, P(x)\,) \Leftrightarrow (\,\exists\, x \in E,$ NON$(P(x))\,)$
NON$(\,\exists\, x \in E,\, P(x)\,) \Leftrightarrow (\,\forall\, x \in E,$ NON$(P(x))\,)$

2 Applications

2.1 Définitions

Une **application** est la donnée d'un triplet (f, E, F) tel qu'à tout élément x de E est associé un **unique** élément de F, noté $f(x)$. On note $f : E \to F$.
L'ensemble E s'appelle **ensemble de départ** de f et l'ensemble F s'appelle **ensemble d'arrivée** de f.
Si $y = f(x)$, l'élément $y \in F$ est appelé **image** de x par f, l'élément $x \in E$ est appelé **antécédent** de y par f.

L'application $Id_E : E \to E$ est définie par $Id_E(x) = x$ pour tout $x \in E$; elle s'appelle **identité** de E.

Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications. L'application $g \circ f : E \to G$ définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in E$, s'appelle la **composée** de g et f.
Attention : l'application $g \circ f$ peut avoir un sens sans que $f \circ g$ n'en ait un. De plus, en général $g \circ f \neq f \circ g$. En revanche on a toujours $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ quand les deux applications en question sont définies.

2.2 Injection, surjection, bijection

Définition. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **injective** si tout élément de F possède au plus un antécedent par f ; c'est-à-dire si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède au plus une solution x dans E.

En langage mathématique,
l'application f est injective si : $\forall\, x_1 \in E,\ \forall\, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;
l'application f n'est pas injective si : $\exists\, x_1 \in E,\ \exists\, x_2 \in E,\ x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.

Définition. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **surjective** si tout élément de F possède au moins un antécédent par f ; c'est-à-dire si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède au moins une solution x dans E.

En langage mathématique,
l'application f est surjective si : $\forall\, y \in F,\ \exists\, x \in E,\ f(x) = y$;
l'application f n'est pas surjective si : $\exists\, y \in F,\ \forall\, x \in E,\ f(x) \neq y$.

Définition. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **bijective** si elle est injective et surjective ; c'est-à-dire si tout élément de F possède exactement un antécédent par f ; ou encore si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède exactement une solution x dans E.

Si f est une bijection de E sur F, on appelle **bijection réciproque** de f, l'application $f^{-1} : F \to E$ qui à tout $y \in F$ associe son unique antécédent x de E. On a $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$.

Proposition 2.1 *Deux bijections $f : E \to F$ et $g : F \to E$ sont réciproques l'une de l'autre si et seulement si $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.*

Proposition 2.2 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. L'application $g \circ f$ est une bijection de E sur G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

2.3 Image directe, image réciproque

Soit $f : E \to F$ une application. Pour toute partie A de E, on note

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\};$$

l'ensemble $f(A)$ est appelé **image** de A par f. Pour tout $y \in F$, on a :

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A,\ f(x) = y.$$

Pour toute partie B de F on note

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\};$$

l'ensemble $f^{-1}(B)$ est appelé **image réciproque** de B par f (**Attention** : la notation $f^{-1}(B)$ ne suppose pas que f soit bijective !). Pour tout $x \in E$, on a :

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Proposition 2.3 *Soient $f : E \to F$ une application de E dans F, A_1 et A_2 deux parties de E et B_1 et B_2 deux parties de F. On a :*

$$\text{si } A_1 \subset A_2 \text{ alors } f(A_1) \subset f(A_2) \quad \text{et} \quad \text{si } B_1 \subset B_2 \text{ alors } f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \quad \text{et} \quad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \quad \text{et} \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

Attention *: toutes les inclusions ci-dessus peuvent être strictes.*