EXAMEN DE MATHÉMATIQUES–UE 103–SESSION 1–DURÉE 3h

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits

EXERCICE 1.

Pour tout réel m, on considère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & m & -2 \\ 1 & -m & 2 \end{pmatrix}$ et le système d'équations

$$(S_m) \ : \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + 2z & = & 1 \\ mx + my - 2z & = & 2 \\ x - my + 2z & = & 1 \end{array} \right. .$$

1. Calculer : ${}^tA_0$, A_0^2, $\det(A_0)$ et $\det(3\,A_0)$.
2. Expliquer pourquoi la matrice A_0 est inversible et calculer A_0^{-1}.
3. Pour quelles valeurs du réel m, la matrice A_m est-elle inversible ?
4. Écrire (S_m) sous forme matricielle. Pour quelles valeurs de m, le système (S_m) admet-il une unique solution ?
5. Résoudre (S_0), (S_1) et (S_{-1}).

EXERCICE 2.

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) \,=\, e^x - x - 1\,,$$

dont on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$)
3. Prouver que $\mathcal{C}$ admet au voisinage de $-\infty$ une droite asymptote Δ dont on donnera une équation puis étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et Δ.
4. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ puis donner $f'(x)$ et étudier les variations de la fonction f et son signe sur $\mathbb{R}$.
5. Donner une équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a, où $a \in \mathbb{R}$. Prouver que T_a coupe la droite d'équation $y = -x - 1$ au point d'abscisse $a - 1$.
6. Tracer Δ, T_2 et $\mathcal{C}$. On donne $e^2 \approx 7,4$.

Tourner la page svp

EXERCICE 3.

I. Rappeler : domaine de définition, les limites en $+\infty$ et en $-\infty$, ainsi que la dérivée de la fonction arctangente.

II.

1. Enoncer le théorème des accroissements finis.
2. Prouver que pour tout entier naturel n :
$$\frac{1}{1+(n+1)^2} \leq \arctan(n+1) - \arctan(n) \leq \frac{1}{1+n^2}\,.$$
3. Soit u la suite réelle de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}$.
   (a) Prouver que u est croissante.
   (b) Déduire de la question (2) que pour tout $k \geq 1$, on a :
   $$\frac{1}{1+k^2} \leq \arctan(k) - \arctan(k-1)\,.$$
   (c) En déduire que u est majorée par $\frac{\pi}{2}$.
   (d) La suite u est-elle convergente ? Justifier.

EXERCICE 4.

Soit $P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$.

1. Prouver que i est racine du polynôme P. Quel est son ordre ?
2. Déterminer les racines complexes de P.