EXAMEN DE MATHÉMATIQUES–UE 103– DURÉE 2h

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits

EXERCICE 1.

On considère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ où m est un nombre réel.

1. Calculer : $A_0 - A_1$ et A_0A_1.
2. Écrire le système linéaire (S_m) d'écriture matricielle $A_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 3m \end{pmatrix}$.
3. Calculer $\det(A_m)$, puis donner $\det(A_0)$, $\det(2\,{}^tA_0)$, et $\det(A_0^3)$.
4. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?
5. Déterminer, **sans calcul**, l'ensemble des solutions de (S_0).
6. Résoudre (S_1).

EXERCICE 2.

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{e^x - 1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,, \end{cases}$$

dont on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Justifier que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.
   (b) La fonction f est-elle continue en 0 ?
   (c) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
   (d) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
2. Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.

Tourner la page svp

EXERCICE 3.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(3+x)$ et (u_n) la suite réelle définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $1 \leq u_n \leq 2$.
   [On rappelle que $e \simeq 2,7$ et $e^2 \simeq 7,3$.]

2. Montrer que f admet un unique point fixe ℓ dans l'intervalle $[1,2]$.
   [On rappelle qu'un point fixe est un point x vérifiant $f(x) = x$. On pourra étudier la fonction $g(x) = f(x) - x$.]

3. Enoncer le théorème des accroissements finis.

4. Montrer que pour tout $x, y \in [1,2]$ on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|\,.$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell|.$$

6. La suite (u_n) est-elle convergente ?