EXAMEN DE MATHÉMATIQUES–UE 103–SESSION 1–DURÉE 3h

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits

EXERCICE 1.

On considère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ m & 3 & 2 \end{pmatrix}$ où m est un nombre réel.

1. Calculer : $A_0 - A_1$ et $A_0 A_1$.
2. (a) Calculer $\det(A_m)$. Pour quelles valeurs de m, la matrice A_m est inversible ?
   (b) Calculer $\det(2\,A_m)$, $\det(A_m\,{}^tA_m)$ et $\det\big(A_m^3\big)$.
3. Écrire le système linéaire (S_m) d'écriture matricielle $A_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   On notera $\mathcal{S}_m$ l'ensemble de ses solutions.
4. (a) Justifier que A_0 est inversible, puis calculer A_0^{-1}.
   (b) Résoudre (S_0).
   (c) Résoudre (S_{-1}).

EXERCICE 2.

Soit f la fonction réelle définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x(1 - \ln x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,, \end{cases}$$

dont on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On rappelle que : $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.
2. Étude locale en 0^+.
   (a) la fonction f est-elle continue en 0 ?
   (b) la fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. (a) Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
   (b) Construire le tableau des variations de f sur $[0, +\infty[$.
   En déduire les éventuels extremums de f sur $[0, +\infty[$.
5. Pour tout $a \in]0, +\infty[$, on note (T_a) la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse a. Donner une équation de (T_a), puis déterminer l'intersection de (T_a) avec $(0; \vec{j})$.
6. Tracer T_2 et $\mathcal{C}$. On rappelle que $e = 2,7\ldots$.
7. Tracer la courbe $\mathcal{C}_1$ d'équation : $y = |f(x)|$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
   Par lecture graphique, en quels points de $[0, +\infty[$ la fonction $|f|$ n'est-elle pas dérivable?

Tourner la page svp

EXERCICE 3. On pose, pour tout entier naturel n non nul

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Enoncer le théorème des accroissements finis.

   (b) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

   $$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

   (c) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
3. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = u_n - \ln(n)$.

   (a) En utilisant la question 2(b), démontrer que la suite (v_n) est décroissante et positive.

   (b) En déduire que (v_n) converge vers une limite $\gamma \geq 0$.

EXERCICE 4.

1. Déterminer les nombres a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + b & \text{si } x < 2 \\ a & \text{si } x = 2 \\ bx^2 + 2x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

   soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction obtenue réalise une bijection de $]2, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.

EXERCICE 5.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - i = 0$.
2. En déduire une factorisation de la fonction polynomiale $P(z) = z^3 - i$ sur $\mathbb{C}$.
3. On considère la matrice $A(z) = \begin{pmatrix} z^2 & i \\ 1 & z \end{pmatrix}$ où $z \in \mathbb{C}$.

   Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ la matrice $A(z)$ est-elle inversible ?