CHAPITRE 1

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x^2 - 2x - 3 > 0$;
2) $2x^2 - 7x + 3 = 0$, $2x^2 - 7x + 3 \leq 0$.

Exercice 2

1) Simplifier l'écriture des réels suivants :
$a = e^{\frac{1}{2}\ln 16} - e^{\ln 3}$ $b = \ln(\sqrt{e^5})$ $c = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

2) Définir puis simplifier les expressions suivantes où x est un réel :
$A(x) = (x+1)\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ et $B(x) = \left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2$.

Exercice 3 Interpréter géométriquement, puis résoudre dans $\mathbb{R}$:
1) $|x+3| \geq 1$; 2) $1 < |1-x| \leq 5$; 3) $|x+3| = |x-5|$.

Exercice 4

1) Démontrer que pour tous x et y réels, on a $|x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).
À quelle condition sur les nombres réels x et y a-t-on $|x+y| = |x| + |y|$?
2) Démontrer que pour tous x et y réels, on a $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Exercice 5 Soit $f : x \mapsto |x+1| - |2x-1|$.

1) Tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2) Graphiquement, en déduire les points où la fonction f est dérivable et les solutions de $|f(x)| \geq \dfrac{3}{2}$.

Exercice 6

Soient x et y deux réels tels que $-1 \leq x \leq 2$ et $3 \leq y \leq 4$. Encadrer x^2, $x - y$ et xy.

Exercice 7 Démontrer par l'absurde les propositions suivantes

1) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2) L'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 8

1) Soient p et q deux entiers naturels tels que : $p \leq q$. Combien y a-t-il d'entiers k tels que : $p \leq k \leq q$?
2) a) Expliciter : $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^l$, $B = \displaystyle\sum_{l=1}^{4} k^l$, $C = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} l$, $D = \displaystyle\sum_{l=1}^{4} \frac{1}{k+l}$.
   b) À l'aide du symbole $\sum$, écrire les sommes suivantes : $E = 17 + 18 + \cdots + 35$,
   $F = 2^6 + 2^7 + \cdots + 2^{13}$, $G = 30 + 33 + \cdots + 297 + 300$, $H_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n+1}$.

Exercice 9

1) Soit a un nombre réel positif. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

2) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

3) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4) Démontrer par récurrence que pour tout $q \neq 1$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Application : Calculer : $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ et $\displaystyle T_n = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{3}{4}\right)^k$.

5) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

6) Redémontrer les résultats 2), 4) et 5) en utilisant une autre méthode.

Exercice 10 Soit n un entier naturel. La fonction *factorielle* n, notée $n!$ est définie sur $\mathbb{N}$ par récurrence par $0! = 1$ et $\forall n \geq 1, n! = n(n-1)!$.

1) Calculer 1!, 2!, 3! et 4!

On définit les coefficients du binôme $\displaystyle\binom{n}{k}$ pour $0 \leq k \leq n$ par $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

2) Calculer $\displaystyle\binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{5}{3}$.

3) Démontrer que pour $1 \leq k \leq n$, $\displaystyle\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

4) La formule du binôme de Newton est donnée par :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Vérifier la formule pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

5) Démontrer l'inégalité de l'exercice 9 question 1) en utilisant la formule du binôme de Newton.

Exercice 11 À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} 2^k \, 3^{7-k}, \qquad B = \sum_{k=2}^{10} \binom{10}{k} \qquad \text{et} \qquad C_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} 2^k \, 3^{2n-k}.$$

Exercice 12

1) Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leq q$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} (x_{k+1} - x_k)$ (télescopage).

2) Calculer $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.